

DER EINFLUSS DER DIPOLARWECHSELWIRKUNG AUF
DIE NICHTGLEICHGEWICHTSSTRUKTURBILDUNG IN
GETRIEBENEN FERROMAGNETISCHEN FILMEN

Vom Fachbereich Physik
der Technischen Universität Darmstadt

zur Erlangung des Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

genehmigte
Dissertation

von

DIPL.-PHYS. ANJA RIEGERT
aus Groß-Gerau

Referent: Prof. Dr. H. Sauermann
Korreferent: Prof. Dr. F. Kaiser

Tag der Einreichung: 24. Oktober 2001
Tag der Prüfung: 12. Dezember 2001

Darmstadt 2001
D17

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Das System	7
2.1	Bewegungsgleichung	7
2.2	Das effektive Feld	8
2.3	Randbedingungen	9
3	Die Instabilität	10
3.1	Stationäre Lösung	10
3.2	Entwicklung um die stationäre Lösung	11
3.3	Floquet–Problem	12
3.3.1	Stückweise konstantes treibendes Feld	13
3.3.2	Störungstheorie für kleine treibende Felder und kleine Dämpfung	14
3.4	Eigenmoden in Richtung der Filmdicke	14
3.4.1	Integration der Gleichung für das magnetostatische Potential .	15
3.4.2	XY –Modell	17
3.4.3	Genäherte Moden für isotropen Austausch	18
3.5	Bestimmung der Schwelle	20
3.5.1	Instabilität des XY –Modells	20
3.5.2	Genäherte Instabilität bei isotropem Austausch	22
4	Ableitung der allgemeinen Amplitudengleichung	25
4.1	Bewegungsgleichungen	26
4.2	Die Instabilitätsschwelle	29
4.3	Multiple–Scale–Entwicklung	31
4.4	Säkularbedingung	31
4.5	Separation der Ordnungen	33
5	Amplitudengleichung für ferromagnetischen Film	44
5.1	Instabilität	44
5.2	Bewegungsgleichungen für magnetischen Film	45
5.3	Bestimmung der Koeffizienten	47
5.4	Nichtlokaler Beitrag	49

6	Nichtlokale Amplitudengleichungen	51
6.1	Integralformulierung	52
6.2	Integration der magnetostatischen Potentialgleichung für die Fourier- mode $\mathbf{k} = 0$	55
6.2.1	Bestimmung der Integrationskonstanten	61
6.3	Amplitudengleichung	64
6.3.1	Ferromagnetischer Film	67
6.3.2	Koeffizientenverlauf	68
6.4	Vergleich mit hydrodynamischem Mean Drift	69
6.5	Ausblick	71
7	Zusammenfassung	73
A	Floquetsche Störungstheorie	76
B	Entwicklung der linearen Operatoren	82
C	Ableitungsrelationen der zusätzlichen Gleichung	83
D	Transformationseigenschaften	85
E	Fouriertransformationen	87
E.1	Fourierrücktransformationen	87
E.1.1	Beitrag von \mathcal{J}_\perp	87
E.1.2	Beitrag von \mathcal{J}_z	88
E.2	Lösung der Integralgleichung	88
	Literaturverzeichnis	90

Kapitel 1

Einleitung

In der Natur beobachten wir selbstorganisierte Strukturen wie Wolken in Streifenformationen am Himmel, Sandwellen in der Wüste oder die Muster von Fischen. Wie kommt es, dass solch komplexe Systeme derart reguläre Muster ausbilden? Dem Studium dieser Naturphänomene sind Grenzen gesetzt, aber Physiker untersuchen seit langem einfachere Systeme, die denselben Gesetzmäßigkeiten unterliegen und fast ebenso faszinierend sind. Das bekannteste ist sicherlich das Rayleigh–Bénard–Experiment: Heizt man eine dünne Flüssigkeitsschicht von unten, bleibt die Flüssigkeit bei einem kleinen Temperaturgradienten in Ruhe, die Energie wird durch Wärmeleitung transportiert. Erhöht man die Temperaturdifferenz, setzt bei einem bestimmten Wert plötzlich Konvektion ein, und es entstehen geordnete Strukturen wie Rollen oder Hexagone.

In gedämpften Systemen können sich Nichtgleichgewichtsstrukturen nur durch ständige Energiezufuhr ausbilden. Dabei ist der homogene Zustand bei kleinem treibendem Feld stabil. Eine qualitative Änderung des Zustands tritt nicht allmählich, sondern plötzlich bei einem kritischen Parameter auf. Das System geht in einen geordneten, selbstorganisierten Zustand mit geringerer Symmetrie über, der meist räumlich oder zeitlich periodisch ist. Dieser kann bei Erhöhung des Feldes selbst wieder instabil werden: Durch weitere Symmetriebrechung können kompliziertere Zustände entstehen, eventuell sogar Turbulenz.

Magnetische Systeme sind ein klassisches Beispiel für Gleichgewichtsstrukturbildung: Die Dipol–Dipol–Wechselwirkung destabilisiert homogene Zustände, so dass sich Weißsche Bezirke ausbilden können. Seit den frühen Arbeiten von Suhl, der die Schwelle bestimmte, bei der die homogene Magnetisierung eine Instabilität gegen homogen treibende Felder aufweist [Suhl57], wird aber auch die Nichtgleichgewichtsstrukturformation erforscht. Obwohl magnetische Systeme auf Grund ihrer intrinsischen starken Nichtlinearität ein Paradebeispiel der Nichtlinearen Dynamik darstellen, sind diese Strukturen noch weitgehend unverstanden, zumal sie experimentell nur schwer detektiert werden können [CrHo].

In dieser Arbeit wird die Strukturbildung in dissipativen, parametrisch getriebenen ferromagnetischen Filmen untersucht. Die Dynamik der Magnetisierungsichte wird durch die Landau–Lifshitz–Gleichung beschrieben, die in Kapitel 2 mit allen Beiträgen des effektiven Feldes vorgestellt wird. Dabei berücksichtigen wir insbesondere den Einfluss der langreichweitigen Dipolarwechselwirkung, die zu räumlich nichtlokalen Beiträgen in der Bewegungsgleichung führt. In magnetostatischer Näherung kann das Dipolarfeld als der Gradient eines Potentials beschrieben werden.

Die Dipolarwechselwirkung spielt schon für die statischen Strukturen ferromagnetischer Filme eine entscheidende Rolle, da allein durch die kurzreichweitige Austauschwechselwirkung in zweidimensionalen Systemen keine langreichweitige magnetische Ordnung erreicht werden kann. Auch mikroskopische Spinwellenspektren werden durch das Dipolarfeld qualitativ stark beeinflusst [DMW].

Wir analysieren die Nichtgleichgewichtsstrukturbildung nach einem Schema, das durch das universelle Verhalten unterschiedlicher Systeme, die durch völlig verschiedene mikroskopische Gleichungen beschrieben werden, vorgegeben ist: Der triviale Zustand wird gegen räumlich inhomogene Störungen mit einer kritischen Wellenzahl linear instabil. Oberhalb der Schwelle treten durch die Seitenbänder langsame Modulationen auf, die durch Amplitudengleichungen beschrieben werden können.

Zur Bestimmung der linearen Instabilität der homogenen stationären Lösung muss in Kapitel 3 ein explizit zeitabhängiges partielles Differentialgleichungssystem unter Berücksichtigung der zusätzlichen Potentialgleichung gelöst werden. Für die Bestimmung der räumlichen Eigenmoden in Richtung der Filmdicke werden bei isotroper Austauschwechselwirkung neben den Maxwellschen Stetigkeitsbedingungen zusätzliche Randbedingungen für die Magnetisierung benötigt. Da die exakten Moden eine sehr komplizierte Form haben, diskutieren wir zum einen genäherte Moden, zum anderen betrachten wir den Fall, bei dem die Austauschwechselwirkung nur in der Ebene wirkt, so dass keine zusätzlichen Randbedingungen benötigt werden. Die Potentialgleichung kann mit Hilfe Greenscher Funktionen integriert werden. Für kleine treibende Felder und kleine Dämpfung wird mittels Floquetscher Störungstheorie die Instabilitätsschwelle bestimmt. Dabei hat der kritische Wellenvektor durch das Zusammenwirken von Anisotropie und Dipolarwechselwirkung eine ausgezeichnete Richtung.

In räumlich ausgedehnten Systemen gibt es leicht oberhalb der Schwelle nicht nur eine instabile Wellenzahl, sondern es existiert ein ganzes Band kritischer Moden. Da diese von der kritischen aber nur sehr leicht abweichen, macht sich ihr Einfluss erst auf großen räumlichen Skalen bemerkbar. Die schnellen Variationen sind also von einer Amplitude überlagert, die langsam räumlich und zeitlich variiert. Eine Bewegungsgleichung für diese Amplitude ist geeignet, das System oberhalb der Schwelle zu beschreiben: Sie enthält mehr Informationen als das lineare System, ist aber einfacher als die komplette Gleichung.

Die Elimination der schnellen Variablen erfolgt in einer Störungsentwicklung durch eine Separation der Skalen. Durch die Vermeidung von säkularen, d. h. linear anwachsenden Termen ergeben sich Amplitudengleichungen zur Beschreibung der raumzeitlichen Dynamik oberhalb der Schwelle. Diese Gleichungen haben eine universelle Struktur, das spezielle System macht sich nur in den Koeffizienten bemerkbar.

Amplitudengleichungen wurden zum ersten Mal von Newell und Whitehead [NeWh] zur Beschreibung der Strukturbildung bei Rayleigh–Bénard–Konvektion abgeleitet und seitdem auf sehr verschiedenartige Systeme wie hydrodynamische und Reaktions–Diffusions–Systeme, aber auch bei Flüssigkristallen und optischen und sogar biologischen Systeme angewendet [CrHo]. Dabei wurde im Laufe der Jahre der Formalismus immer mehr verallgemeinert und erweitert und so auf größere Klassen von Systemen anwendbar.

Kuramoto und Tsuzuki [KuTs] leiteten für ein zweikomponentiges Reaktions–Diffusionssystem eine Ginzburg–Landau–Gleichung mit Koeffizienten ab. Unter Verwendung eines ähnlichen Formalismus bezogen Haken und Wunderlin [Hake, WuHa] die Reduktion auf die zentrale Mannigfaltigkeit mit ein und berücksichtigten zusätzlich eine stochastische Kraft. Elmer [El88] leitete aus allgemeinen Gleichungen mit Integralterm eine nichtlokale Amplitudengleichung ab. Außerdem beschrieb er ideale Musterbildungsprozesse schwach oberhalb der Schwelle in ferromagnetischen Filmen [El93, El96]. Just [JustW] stellte eine Ableitung bereit, mit der sich für ganz allgemeine Bewegungsgleichungen und Instabilitäten inklusive der Berücksichtigung einer expliziten Zeitabhängigkeit die Koeffizienten der Amplitudengleichung ergeben. Der verwendete Formalismus machte es möglich, auch Instabilitäten höherer Kodimension zu analysieren: So untersuchten Matthäus und Sauermann [MaSa] eine Turing–Hopf–Bifurkation, die durch das Zusammentreffen einer Soft–Mode mit einer Hard–Mode–Linie gekennzeichnet ist. In [JMS] wurde für eine entartete Soft–Mode–Instabilität eine Amplitudengleichung abgeleitet, die den Übergang von sub- zu superkritischem Verhalten beschreiben. Kugler untersucht das Aufeinandertreffen einer Soft–Mode und einer Sattel-Knoten–Bifurkation [Kugl].

In hydrodynamischen Systemen treten wie in magnetischen Systemen langreichweitige Wechselwirkungen auf: Auf Grund der Inkompressibilität der Flüssigkeit kann der Druck auch durch eine Potentialgleichung beschrieben werden. Je nach Form der Randbedingungen treten entweder gekoppelte dynamische Gleichungen auf [SiZi, ZiSi], oder es werden räumlich nichtlokale Beiträge ohne eigene zeitliche Dynamik hervorgerufen [Cr83]. In räumlich isotropen Systemen sind diese sogenannten Mean–Drift–Terme für neue sekundäre Instabilitäten verantwortlich und können sogar den Weg zu turbulentem Verhalten weisen. Wir wollen in dieser Arbeit verstehen, welche nichtlokalen Effekte durch die Dipolarwechselwirkung entstehen.

Dazu soll in Kapitel 4 zunächst der allgemeine Amplitudengleichungsformalismus auf Systeme mit einer großen Ausdehnung in der Ebene und einer beschränkten Dicke in der dritten Richtung erweitert werden, bei denen das System neben den

dynamischen Bewegungsgleichungen eine verallgemeinerte Potentialgleichung enthält, die die räumlichen Variationen einer zusätzlichen Größe ohne eigene zeitliche Dynamik beschreibt. Dies ist zum Beispiel bei ferromagnetischen Filmen das magnetostatische Potential oder bei hydrodynamischen Systemen der Druck (zumindest unter gewissen Näherungen). Durch die allgemein gehaltenen Bewegungsgleichungen werden Amplitudengleichungen abgeleitet, die auch auf andere Systeme anwendbar sind, deren Bewegungsgleichungen der Struktur nach denen des ferromagnetischen Problems entsprechen.

Mit der abgeleiteten allgemeinen Amplitudengleichung lassen sich dann in Kapitel 5 die Koeffizienten für den ferromagnetischen Film unter Verwendung der Ergebnisse der linearen Instabilität aus Kapitel 3 berechnen. Bei der Bestimmung der konkreten nichtlinearen Terme fällt dabei auf, dass Beiträge der nichtlokalen Kopplung zur Fouriermode $\mathbf{k} = 0$ singularär werden können. Dies ist ein erstes Indiz für das Auftreten nichtlokaler Beiträge.

Wenn eine schnelle Trägerwelle fehlt, können sich Beiträge der langreichweitigen Dipolarwechselwirkung über große Distanzen bemerkbar machen. Auch wenn der Film auf eine endliche Dicke beschränkt ist, wird durch langsame räumliche Variationen der Magnetisierung im Außenraum ein Feld induziert, das sich in allen Richtungen langsam ändert, also auch langsame Skalen senkrecht zum Film enthält. Diese langreichweitigen Variationen beeinflussen wiederum den Innenraum und führen dadurch zu nichtlokalen Beiträgen des magnetostatischen Potentials, die wir in Kapitel 6 ableiten. In der dynamischen Gleichung ergeben sich nichtlokale Effekte natürlicherweise durch die Ankopplung an das Potential. Daher muss die dynamische Gleichung bis zu der Ordnung entwickelt werden, in der sich die Effekte bemerkbar machen. Die Säkularbedingung liefert in vierter Ordnung eine nichtlokale Amplitudengleichung, die für neuartige Stukturbildungsprozesse verantwortlich ist.

Kapitel 2

Das System

2.1 Bewegungsgleichung

In dieser Arbeit wird die raum-zeitliche Dynamik ferromagnetischer Filme untersucht. Da die Längenskalen der auftretenden Strukturen groß gegen die atomaren Abstände sind, ist die relevante Observable die makroskopische lokale Magnetisierungsdichte $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$. Ihre Dynamik wird durch die Landau–Lifshitz–Gleichung

$$\partial_t \mathbf{M} = -\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{eff} - \Gamma \mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{eff}) \quad (2.1)$$

bestimmt. Dabei beschreibt der erste Term eine Präzession der Magnetisierung um das lokale effektive Feld \mathbf{H}_{eff} , während der zweite, dissipative Term für eine Relaxation der Magnetisierung in Richtung des effektiven Feldes verantwortlich ist. Dieser 1935 von Landau und Lifshitz [LaLi] phänomenologisch eingeführte Dämpfungsterm erhält den Betrag der Magnetisierung. In neueren Arbeiten [Gara, Plef] konnte durch eine mikroskopische Ableitung der Gleichung (2.1) gezeigt werden, dass diese Form für typische Ferromagneten unterhalb der Curie–Temperatur den dominierenden Anteil der Magnetisierungsdynamik enthält. Dagegen spielen Bloch–artige Dämpfungsterme, die den Betrag der Magnetisierung reduzieren, bei tiefen Temperaturen keine Rolle.

Wir verwenden die Gleichung (2.1) hier in dimensionsloser Form, bei der die Sättigungsmagnetisierung $|\mathbf{M}_0|$ und das gyromagnetische Verhältnis herauskaliert wurden.

Geometrie

Wir betrachten einen Film, der in zwei Raumrichtungen (x, y –Ebene) eine große Ausdehnung besitzt, während er in der dritten Raumrichtung (z) auf die Dicke d

beschränkt ist. Diese liegt bei experimentell verwendeten ferromagnetischen Filmen typischerweise in der Größenordnung von $1\mu m$.

2.2 Das effektive Feld

Um die Bewegungsgleichung zu vervollständigen, benötigen wir noch die Beiträge des effektiven Feldes $\mathbf{H}_{eff}(\mathbf{r}, t)$. Diese bestehen zum einen aus externen Feldern, zum andern aus internen Wechselwirkungen:

$$\mathbf{H}_{eff} = (H_0 + h(t))\mathbf{e}_z + aM_x\mathbf{e}_x + bM_z\mathbf{e}_z + J_{ik}\partial_{x_i}\partial_{x_k}\mathbf{M} + \mathbf{h}_{dip} \quad (2.2)$$

Das statische Feld H_0 gibt die Richtung für einen Zustand homogener Magnetisierung des Systems vor. Wir setzen voraus, dass diese Lösung ohne treibendes Feld stabil ist, d. h. H_0 muss so groß sein, dass keine Domänen auftreten. Um diesen Zustand zu destabilisieren, wirkt auf das System zusätzlich ein periodisch treibendes Magnetfeld (d. h. $h(t) = h(t + T)$), das hier in dieselbe Richtung wie das statische Feld weist.

Als interne Wechselwirkungen werden das kurzreichweitige Austauschfeld, das allgemein die Form $J_{ik}\partial_{x_i}\partial_{x_k}\mathbf{M}$ hat, und das langreichweitige Dipolarfeld \mathbf{h}_{dip} berücksichtigt. Der Austauschterm resultiert aus der elektrostatischen Coulomb-Wechselwirkung, wobei die zweiten Ableitungen aus einer Nächste-Nachbar-Wechselwirkung im Kontinuumslimit entstehen [Akhi]. Konkret werden hier die beiden Extremfälle einer isotropen ($J_{ik} = J\delta_{ik}$) und einer XY -Austauschwechselwirkung ($J_{11} = J_{22} = J$, $J_{ik} = 0$ sonst) behandelt. Das Dipolarfeld kann in magnetostatischer Näherung¹ als der Gradient eines Potentials dargestellt werden:

$$\mathbf{h}_{dip} = -\nabla\Phi_M \quad (2.3)$$

Mit

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{b} = \mathbf{h}_{dip} + 4\pi\mathbf{M} \quad (2.4)$$

erhält man für dieses magnetostatische Potential eine zusätzliche Differentialgleichung:

$$\Delta\Phi_M = \begin{cases} 4\pi\nabla \cdot \mathbf{M} & \text{für } |z| \leq \frac{d}{2} \\ 0 & \text{für } |z| > \frac{d}{2} \end{cases} \quad (2.5)$$

Für das magnetostatische Potential ergeben sich an den Rändern Stetigkeitsbedingungen, die aus den Maxwellschen Gleichungen folgen:

¹Wenn die elektromagnetische Wellenlänge groß im Vergleich zur typischen Längenskala der magnetischen Strukturen ist, kann die Lichtgeschwindigkeit als unendlich betrachtet werden [Suhl94].

- Wegen der Stetigkeit der Tangentialkomponente von \mathbf{h} muss auch das Potential an den Rändern stetig sein:

$$\Phi_{M,i} = \Phi_{M,a} \quad \text{für} \quad z = \pm \frac{d}{2} \quad . \quad (2.6)$$

- Aus der Stetigkeit der Normalkomponente von \mathbf{b} folgt

$$4\pi M_z - \partial_z \Phi_{M,i} = -\partial_z \Phi_{M,a} \quad \text{für} \quad z = \pm \frac{d}{2} \quad . \quad (2.7)$$

- Damit das Feld im Unendlichen verschwindet, muss für das Potential

$$\partial_z \Phi_{M,a} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad |z| \rightarrow \infty \quad (2.8)$$

gelten.

Das System weist eine biaxiale Anisotropie auf, deren Stärke durch die Parameter a und b bestimmt wird. Anisotropien entstehen durch die Wechselwirkung der magnetischen Momente mit dem elektrischen Feld des Kristallgitters [Akhi]. Das Anisotropiefeld in x -Richtung bricht in Kombination mit der den Orts- und Spinraum koppelnden Dipolarwechselwirkung die Rotationsinvarianz in der Ebene.

2.3 Randbedingungen

Da im allgemeinen durch die Austauschwechselwirkung in der Bewegungsgleichung (2.1) zweite Ableitungen $\partial_z^2 \mathbf{M}$ auftreten, sind die Maxwellschen Stetigkeitsbedingungen nicht ausreichend, um das Eigenwertproblem zu definieren. Für das lineare Problem werden zur Festlegung der beiden Komponenten der Magnetisierung jeweils noch zwei Randbedingungen benötigt. Diese lassen sich in linearer Näherung aus einer Grenzflächenbetrachtung ableiten [Keff]. Bei isotroper Austauschwechselwirkung erhält man für die gewählte Geometrie²

$$\partial_z M_{x/y} \pm \zeta M_{x/y} = 0 \quad \text{für} \quad z = \pm \frac{d}{2} \quad . \quad (2.9)$$

Dabei ist der Parameter ζ proportional zur Oberflächenanisotropiekonstante. In den Grenzfällen $\zeta \rightarrow \infty$ bzw. $\zeta \rightarrow 0$, bei denen also entweder die Magnetisierung oder ihre Normalableitung am Rand verschwindet, spricht man von gepinnten bzw. ungepinnten Spins.

Im Fall der XY -Austauschwechselwirkung sind keine zusätzlichen Randbedingungen für die Magnetisierung notwendig.

²Dabei wurde schon berücksichtigt, dass die homogene stationäre Lösung in z -Richtung weist.

Kapitel 3

Die Instabilität

In ferromagnetischen Systemen weist die homogene stationäre Magnetisierung, deren Richtung durch das statische Feld vorgegeben wird, eine Instabilität gegen homogen treibende Felder auf. Das kritische treibende Feld wurde zum ersten Mal von Suhl berechnet [Suhl57].

Zur Berechnung der linearen Instabilität muss ein explizit zeitabhängiges partielles Differentialgleichungssystem mit zusätzlicher Gleichung für das magnetostatische Potential gelöst werden. Dazu werden zunächst Lösungsmethoden zur Bestimmung der Floquet-Exponenten entwickelt und dann die Eigenmoden entlang der Filmdicke bestimmt, wobei die Potentialgleichung mit Hilfe der zugehörigen Greenschen Funktion gelöst wird. Mit diesen Kenntnissen kann dann die Schwelle mit zugehörigem kritischem Wellenvektor bestimmt werden.

3.1 Stationäre Lösung

Wie man an der Bewegungsgleichung (2.1) und der Form des effektiven Feldes (2.2) leicht erkennt, ist eine stationäre, homogene Lösung des Systems durch

$$\mathbf{M}_{st} = \mathbf{e}_z \quad \Phi_{M,st} = \begin{cases} 4\pi z & |z| \leq \frac{d}{2} \\ \text{const.} & |z| > \frac{d}{2} \end{cases} \quad (3.1)$$

gegeben. Sie ist ohne treibendes Feld für

$$H_0 > 4\pi - b + a \quad (3.2)$$

stabil: Der homogene Anteil des Dipolarfelds, das entmagnetisierende Feld, wirkt einer homogenen Magnetisierung entgegen; dagegen hängt die stabilisierende Wirkung der Anisotropien vom Vorzeichen der Parameter a und b ab.

3.2 Entwicklung um die stationäre Lösung

Wir entwickeln das System mit

$$\mathbf{M} = \mathbf{e}_z + \mathbf{m} \qquad \Phi_M = \Phi_{M,st} + \Phi \quad (3.3)$$

um die stationäre Lösung. Wegen der Betragserhaltung der Magnetisierung sind nur zwei Komponenten unabhängig. Da die stationäre Lösung in z -Richtung weist und die lineare Abweichung somit keine m_z -Komponente hat, ist es hier am geschicktesten, die Betragserhaltung durch die Elimination von m_z für die höheren Ordnungen mit einer Entwicklung nach \mathbf{m}_\perp

$$m_z = -\frac{1}{2}\mathbf{m}_\perp^2 + \mathcal{O}(4) \quad \text{mit} \quad \mathbf{m}_\perp = \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

auszunutzen. Für die Entwicklung der Landau–Lifshitz–Gleichung (2.1) bis zur dritten Ordnung¹ erhält man somit bei isotroper Austauschwechselwirkung (für das XY–Modell fallen bei den Beiträgen mit J die z -Ableitungen weg)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{m}}_\perp = & \begin{pmatrix} -\Gamma(H(t) - a) & -H(t) \\ H(t) - a & -\Gamma H(t) \end{pmatrix} \mathbf{m}_\perp + \begin{pmatrix} \Gamma & 1 \\ -1 & \Gamma \end{pmatrix} J \Delta \mathbf{m}_\perp + \begin{pmatrix} -\Gamma \partial_x - \partial_y \\ \partial_x - \Gamma \partial_y \end{pmatrix} \Phi \\ & + \begin{pmatrix} \Gamma m_x + m_y \\ \Gamma m_y - m_x \end{pmatrix} \partial_z \Phi \\ & + \frac{b}{2} \mathbf{m}_\perp^2 \begin{pmatrix} m_y \\ -m_x \end{pmatrix} + \frac{a}{2} \mathbf{m}_\perp^2 \begin{pmatrix} 0 \\ m_x \end{pmatrix} + \frac{\Gamma}{2} ((H(t) + b) \underline{m}_\perp^2 - 2am_x^2) \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \end{pmatrix} \\ & + J ((\nabla m_x)^2 + (\nabla m_y)^2) \begin{pmatrix} m_y + \Gamma m_x \\ \Gamma m_y - m_x \end{pmatrix} \\ & + \frac{J}{2} \mathbf{m}_\perp^2 \Delta \begin{pmatrix} -m_y \\ m_x \end{pmatrix} + J m_x m_y \Delta \begin{pmatrix} m_x \\ -m_y \end{pmatrix} + \mathcal{O}(4) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$=: \mathcal{L}_a \mathbf{m}_\perp + \mathcal{L}_b \Phi + \mathcal{N}_2[\mathbf{m}_\perp, \Phi] + \mathcal{N}_3[\mathbf{m}_\perp] + \mathcal{O}(4) \quad , \quad (3.6)$$

wobei die Abkürzung

$$H(t) = H_0 + h(t) - 4\pi + b \quad (3.7)$$

verwendet wurde und \mathcal{N}_2 quadratische bzw. \mathcal{N}_3 kubische Terme in \mathbf{m}_\perp und Φ enthält. Für die vollständige Potentialgleichung erhält man mit der Entwicklung (3.2)

$$\Delta \Phi = \begin{cases} 4\pi (\nabla_\perp \cdot \mathbf{m}_\perp + \partial_z m_z) & \text{für } |z| \leq \frac{d}{2} \\ 0 & \text{für } |z| > \frac{d}{2} \end{cases} \quad (3.8)$$

¹In diesem Kapitel untersuchen wir nur die Linearisierung, die Terme in zweiter und dritter Ordnung werden dann für die Berechnung des nichtlinearen Koeffizienten der Amplitudengleichung benötigt. Die in (3.6) eingeführten Operatoren können später mit den allgemeinen Ausdrücken in Kapitel 4 identifiziert werden.

mit den Randbedingungen (2.7), (2.8)

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \partial_z \Phi = 0 \quad (3.9)$$

$$[\partial_z \Phi_j - \partial_z \Phi_a]_{z=\pm \frac{d}{2}} = 4\pi m_z|_{z=\pm \frac{d}{2}} \quad . \quad (3.10)$$

Um zu untersuchen, wann das lineare System gegen räumlich inhomogene Störungen instabil wird, entwickeln wir \mathbf{m} und Φ nach ebenen Wellen:²

$$\begin{pmatrix} \mathbf{m}_\perp \\ m_z \\ \Phi \end{pmatrix}(\mathbf{r}, z, t) = \sum_{\mathbf{k}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_{\perp \mathbf{k}} \\ \mu_{z \mathbf{k}} \\ \Psi_{\mathbf{k}} \end{pmatrix}(z, t) e^{i \mathbf{k} \mathbf{r}} + c.c. \quad (3.11)$$

mit

$$\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y \quad \mathbf{k} = k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y \quad . \quad (3.12)$$

Damit erhält man die linearisierten Gleichungen

$$\dot{\boldsymbol{\mu}}_{\perp \mathbf{k}} = \begin{pmatrix} -\Gamma(\mathcal{W}_{\mathbf{k}}(t) - a) & -\mathcal{W}_{\mathbf{k}}(t) \\ \mathcal{W}_{\mathbf{k}}(t) - a & -\Gamma \mathcal{W}_{\mathbf{k}}(t) \end{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_{\perp \mathbf{k}} + i \begin{pmatrix} k_y - \Gamma k_x \\ k_x - \Gamma k_y \end{pmatrix} \Psi_{\mathbf{k}} \quad (3.13)$$

$$=: \mathcal{L}_{a \mathbf{k}} \boldsymbol{\mu}_{\perp \mathbf{k}} + \mathcal{L}_{b \mathbf{k}} \Psi_{\mathbf{k}} \quad (3.14)$$

mit

$$\mathcal{W}_{\mathbf{k}}(t) = H(t) + J(k^2 - \partial_z^2) \quad (3.15)$$

und

$$(\partial_z^2 - k^2) \Psi_{\mathbf{k}} = \begin{cases} 4\pi i \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\mu}_{\perp \mathbf{k}} & \text{für } |z| \leq \frac{d}{2} \\ 0 & \text{für } |z| > \frac{d}{2} \end{cases} \quad (3.16)$$

mit den zugehörigen Randbedingungen (3.9) und (3.10), die wegen der Linearität auch für die einzelnen Fourier-Moden gelten. Bei isotropem Austausch werden wegen der z -Ableitung in (3.15) zusätzlich die Randbedingungen (2.9) benötigt. Im Fall der XY -Austauschwechselwirkung fällt die Ableitung nach z in (3.15) weg.

3.3 Floquet-Problem

Die Potentialgleichung in Fourier-Moden (3.16) lässt sich, wie wir in Abschnitt 3.4.1 sehen werden, mit Hilfe der zugehörigen Greenschen Funktion integrieren; daher

²Die Entwicklung von m_z wird später benötigt.

reicht es, für Lösungsverfahren zur Bestimmung der Floquet-Exponenten die dynamische Gleichung (3.13) zu berücksichtigen, wobei man sich $\Psi_{\mathbf{k}}$ in Abhängigkeit von $\mu_{\perp \mathbf{k}}$ eingesetzt vorstellen kann.

Das Differentialgleichungssystem mit zeitlich periodischen Koeffizienten kann, selbst losgelöst vom Problem der Bestimmung der räumlichen Eigenmoden, im allgemeinen nur numerisch gelöst werden. Die folgenden beiden Spezialfälle sind aber auch einer analytischen Rechnung zugänglich.

3.3.1 Stückweise konstantes treibendes Feld

Hat das treibende Feld die spezielle Form

$$h(t) = \begin{cases} +h_0 & \text{für } nT \leq t < (n+1)\frac{T}{2} \\ -h_0 & \text{für } (n+1)\frac{T}{2} \leq t < (n+1)T \end{cases}, \quad (3.17)$$

kann man die Differentialgleichungssysteme für die beiden Halbperioden lösen, da sie zeitlich konstante Koeffizienten haben. Mit diesen Lösungen lässt sich eine Abbildung $\underline{\underline{A}}(T)$ konstruieren, die das System vom Zeitpunkt t auf eine Periodendauer später $t + T$ abbildet. Die Eigenwerte dieser Abbildung entsprechen dann den Floquet-Multiplikatoren Λ , die die Stabilität des Systems bestimmen [Arno].

Mit den Eigenwerten der linearen, zeitunabhängigen Operatoren $\underline{\underline{L}}_j$ für die beiden Halbperioden

$$\lambda_{j\pm} = -\gamma_j \pm i\omega_j, \quad \omega_j = \sqrt{(1 + \Gamma^2)\omega_{0j}^2 - \gamma_j^2} \quad (3.18)$$

(wobei ω_{0j} die Eigenwerte des ungedämpften Systems bezeichnet) sind die Abbildungen der beiden Halbperioden durch

$$\underline{\underline{A}}_j(t) = \underline{\underline{\phi}}_j(t) \underline{\underline{\phi}}_j^{-1}(0) = e^{-\gamma_j t} (\underline{\underline{S}}_j \sin \omega_j t + \underline{\underline{C}}_j \cos \omega_j t) \quad (3.19)$$

gegeben, wobei $\underline{\underline{\phi}}_j(t)$ die Fundamentalsysteme der beiden Halbperioden bezeichnet.

Durch Hintereinanderanwendung der beiden Abbildungen $\underline{\underline{A}}_j(\frac{T}{2})$ ergibt sich die Abbildung für eine Periode. Diese lässt sich für das ferromagnetische System in einen Dämpfungsbeitrag und eine flächenerhaltende Abbildung zerlegen:

$$\underline{\underline{A}}(T) = \underline{\underline{A}}_2(\frac{T}{2}) \underline{\underline{A}}_1(\frac{T}{2}) =: e^{-(\gamma_1 + \gamma_2)\frac{T}{2}} \tilde{\underline{\underline{A}}}(T), \quad \text{wobei } \text{Det} \tilde{\underline{\underline{A}}}(T) = 1 \quad (3.20)$$

Für hinreichend kleine Anisotropien a (andernfalls ist die homogene Lösung aber schon ohne treibendes Feld instabil, vgl. (3.2)) können nur Instabilitäten für $\Lambda = \pm 1$

auftreten³. Als Schwellbedingung für die Stärke des treibenden Feldes h erhält man somit eine implizite Gleichung der Form

$$\text{Sp}\underline{\tilde{A}} = \pm 2 \cosh(\gamma_1 + \gamma_2) \frac{T}{2} \quad . \quad (3.21)$$

Weicht man von der symmetrischen Zeitabhängigkeit (3.17) des treibenden Feldes ab, können auch weitere Instabilitäten auftreten: C. Just untersucht einen Ferromagneten, der durch ein stückweise konstantes Feld getrieben wird, das innerhalb einer Periode T nicht symmetrisch ist. Dieses System weist zusätzlich Hard-Mode-Instabilitäten auf [JustC].

In dieser Arbeit werden die Instabilitäten in stückweise konstant getriebenen Systemen jedoch nicht weiter untersucht; stattdessen wählen wir den folgenden störungstheoretischen Zugang.

3.3.2 Störungstheorie für kleine treibende Felder und kleine Dämpfung

Untersucht man den Einfluss kleiner treibender Felder, lässt sich die Instabilität störungstheoretisch bestimmen: Tritt in der niedrigsten Ordnung kein treibendes Feld auf, ist die Bewegungsgleichung in dieser Ordnung explizit zeitunabhängig und kann exakt gelöst werden. Eine kleine Störung kann dann eine Instabilität verursachen, wenn auch die Dämpfung klein ist. Das treibende Feld führt zu einer Instabilität in parametrischer Resonanz.

Die Floquetsche Störungstheorie ist in Anhang A durchgeführt; für ein treibendes Feld mit der Zeitabhängigkeit $\cos \Omega t$ tritt eine Instabilität mit dem kritischen Exponenten $\omega_c = \frac{\Omega}{2}$ auf, wenn die Instabilitätsbedingung

$$\left| \langle v_+ | \underline{L}_{10} u_+ \rangle \right|^2 = \left| \langle v_+ | \underline{L}_{11} u_- \rangle \right|^2 \quad (3.22)$$

erfüllt ist. Dabei enthält \underline{L}_{10} die Dämpfung und \underline{L}_{11} das treibende Feld (vgl. (A.3)); v_\pm^*, u_\pm (A.5) bezeichnen die Eigenvektoren des ungestörten Systems.

3.4 Eigenmoden in Richtung der Filmdicke

Zur Bestimmung der Instabilitätsschwelle benötigt man sowohl für die störungstheoretische Behandlung als auch für Systeme mit stückweise konstantem treibendem

³Das entspricht Floquet-Exponenten $\lambda = i \frac{n\Omega}{2}$.

Feld die Eigenvektoren des ungetriebenen linearisierten Systems⁴. Dazu müssen wir noch deren räumliche Abhängigkeit in Richtung der Filmdicke bestimmen.

Wegen der zweiten Ableitungen, die im linearen System (3.13), (3.16) bei isotroper Austauschwechselwirkung auftreten, benötigt man zur vollständigen Bestimmung des Randwertproblems zusätzlich zu den Maxwellschen Stetigkeitsbedingungen auch Randbedingungen für die Magnetisierung, die in Kapitel 2.3 aufgeführt sind. Da die Lösungen aber neben der räumlichen auch noch eine zeitliche Abhängigkeit enthalten, muss die Bestimmung der Eigenwerte und –moden kombiniert erfolgen. Mit dem räumlichen und zeitlichen Ansatz

$$\begin{pmatrix} \mu_{\perp \mathbf{k}} \\ \Psi_{\mathbf{k}} \end{pmatrix}(z, t) \sim e^{iqz} e^{\lambda t} \quad (3.23)$$

ergibt sich aus dem linearen System als Dispersionsrelation ein Polynom dritten Grades in $q^2(\lambda)$. Die Eigenfunktionen bestehen also aus einem Satz von sechs Moden mit den zugehörigen Wellenzahlen $q^{(\nu)}$. Es werden also sechs Randbedingungen benötigt, die gerade durch die Randbedingungen des Potentials (3.10) und der Magnetisierung am oberen und unteren Filmrand (2.9) gegeben sind. Dadurch ergibt sich eine transzendente Gleichung, die zusammen mit der Dispersionsrelation die Eigenwerte λ und Wellenzahlen q festlegt. Nach diesem Verfahren können die Eigenmoden bestimmt werden, aber es ist technisch sehr aufwendig, und die Moden haben auch eine sehr komplizierte Form⁵. Daher ist man auf einfachere Lösungen angewiesen: Zum einen wollen wir den Spezialfall der XY–Austauschwechselwirkung behandeln, bei dem die Eigenmoden allein durch die Maxwellschen Randbedingungen festgelegt sind, und zum andern genäherte Moden für isotropen Austausch verwenden. In beiden Fällen wird die Eigenmode dann durch eine einzige Wellenzahl q charakterisiert.

Zur Bestimmung dieser Eigenmoden ist es vorteilhaft, zunächst unter Berücksichtigung der Randbedingungen mit Hilfe der zugehörigen Greenschen Funktion eine Integralform des Potentials zu gewinnen.

3.4.1 Integration der Gleichung für das magnetostatische Potential

Die magnetostatische Potentialgleichung (3.8) mit den Randbedingungen (3.9) und (3.10) lässt sich unter der Verwendung Greenscher Funktion lösen. Dazu müssen

⁴Mit der Ersetzung $\tilde{H}_0 = H \pm h_0$ sind dies auch die Eigenmoden der Halbperioden bei stückweise konstantem treibendem Feld. Für die störungstheoretische Behandlung muss man zusätzlich $\Gamma = 0$ setzen, damit das System in niedrigster Ordnung ungedämpft ist.

⁵Da die Eigenmoden von der Stärke des Feldes \tilde{H}_0 abhängen, sind sie bei stückweise konstantem treibendem Feld für die beiden Halbperioden verschieden. Die Abbildung $\underline{\underline{A}}(T)$ (3.20) würde damit ∞ -dimensional.

wir aber voraussetzen, dass das homogene Randwertproblem nur die triviale Lösung besitzt, d. h. wir müssen uns auf den Fall $\mathbf{k} \neq 0$ beschränken. Für eine Fouriermode ergibt sich die Differentialgleichung

$$(\partial_z^2 - k^2)\Psi_{\mathbf{k}} = g_{\mathbf{k}}(z) \quad (3.24)$$

mit der Inhomogenität⁶

$$g_{\mathbf{k}} = \begin{cases} 4\pi(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\mu}_{\perp\mathbf{k}} + \partial_z \mu_{z\mathbf{k}}) & \text{für } |z| \leq \frac{d}{2} \\ 0 & \text{für } |z| > \frac{d}{2} \end{cases} . \quad (3.25)$$

Berechnet man zunächst das Potential im Außenraum, ergibt sich durch Einsetzen in (3.10) eine Randbedingung für das Potential im Innenraum. Mit Hilfe der zugehörigen Greenschen Funktion erhält man eine Lösung des Potentials in Abhängigkeit von der Magnetisierung, die für den gesamten Raum gilt.

Außenraum

Für den Außenraum verschwindet die Inhomogenität. Unter Berücksichtigung der Randbedingung im Unendlichen (3.9) erhält man für $z > \frac{d}{2}$ bzw. $z < -\frac{d}{2}$ die Lösungen

$$\Psi_{\mathbf{k}a\pm}(z) = \hat{\Psi}_{\mathbf{k}a\pm} e^{-k|z|} . \quad (3.26)$$

Aus der Stetigkeitsbedingung (2.6) des Potentials

$$\Psi_{\mathbf{k}a\pm}\left(\pm\frac{d}{2}\right) = \Psi_{\mathbf{k}i}\left(\pm\frac{d}{2}\right) \quad (3.27)$$

ergibt sich für die Integrationskonstante

$$\hat{\Psi}_{\mathbf{k}a\pm} = \Psi_{\mathbf{k}i}\left(\pm\frac{d}{2}\right) e^{\frac{kd}{2}} . \quad (3.28)$$

Innenraum

Setzt man die Lösung für den Außenraum in (3.10) ein, erhält man für die Randbedingungen bei $\pm\frac{d}{2}$ in Fouriermoden

$$\left[\partial_z \Psi_{\mathbf{k}} \pm k \Psi_{\mathbf{k}} \right]_{z=\pm\frac{d}{2}} = 4\pi \mu_{z\mathbf{k}} \Big|_{z=\pm\frac{d}{2}} . \quad (3.29)$$

⁶Wir integrieren hier die gesamte entwickelte Potentialgleichung inklusive $\mu_{z\mathbf{k}}$, da dies später für die nichtlineare Analyse nützlich sein wird.

Die Differentialgleichung (3.24) lässt sich lösen, indem man die zu den homogenen Randbedingungen gehörende Greensche Funktion bestimmt. Man erhält

$$\mathcal{G}_k(z, z') = \frac{1}{2k} e^{-k|z-z'|} \quad . \quad (3.30)$$

Die gesamte Lösung setzt sich dann aus der Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit homogenen Randbedingungen und der Lösung der homogenen Gleichung mit inhomogenen Randbedingungen zusammen:

$$\Psi_{\mathbf{k}}(z) = c_1 e^{kz} + c_2 e^{-kz} - \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \mathcal{G}_k(z, z') g_{\mathbf{k}}(z') dz' \quad . \quad (3.31)$$

Dabei bestimmen sich die Konstanten c_1 und c_2 aus den Randbedingungen (3.29). Man erhält mit Einsetzen von (3.30) und (3.25)

$$\Psi_{\mathbf{k}}(z) = \frac{2\pi}{k} \left(\mu_{z\mathbf{k}}\left(\frac{d}{2}\right) e^{k(z-\frac{d}{2})} - \mu_{z\mathbf{k}}\left(-\frac{d}{2}\right) e^{-k(z+\frac{d}{2})} - \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e^{-k|z-z'|} (i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\mu}_{\perp\mathbf{k}} + \partial_{z'} \mu_{z\mathbf{k}}) dz' \right) \quad . \quad (3.32)$$

Durch partielle Integration ergibt sich

$$\Psi_{\mathbf{k}}(z) = \frac{2\pi}{k} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e^{-k|z-z'|} (-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\mu}_{\perp\mathbf{k}}(z') + k\mu_{z\mathbf{k}}(z') \operatorname{sgn}(z - z')) dz' \quad (3.33)$$

$$=: \mathcal{J}_{\perp\mathbf{k}} \boldsymbol{\mu}_{\perp\mathbf{k}} + \mathcal{J}_{z\mathbf{k}} \mu_{z\mathbf{k}} \quad . \quad (3.34)$$

Diese Lösung gilt für den gesamten Raum.

3.4.2 XY-Modell

Betrachtet man den Spezialfall eines Systems, bei dem die Austauschwechselwirkung nur in der xy -Ebene wirkt, d. h. $J\Delta \rightarrow J(\partial_x^2 + \partial_y^2)$, werden keine zusätzlichen Randbedingungen für die Magnetisierung benötigt, da die Ableitungen nach z in (3.13) wegfallen. Man muss also nur noch gewährleisten, dass ein gewählter Ansatz für die z -Abhängigkeit eine Eigenmode des Potentials liefert. Setzt man

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_{\perp\mathbf{k}} \\ \Psi_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} (z, t) = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\mu}}_{\perp\mathbf{k}} \\ \hat{\Psi}_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} (t) \begin{cases} \cos qz \\ \sin qz \end{cases} \quad (3.35)$$

in $\Psi_{\mathbf{k}}$ (3.33) ein (wobei in linearer Ordnung $\mu_{z\mathbf{k}} = 0$ ist), ergibt sich für das Integral über die Filmdicke

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e^{-k|z-z'|} \begin{cases} \cos qz \\ \sin qz \end{cases} dz' &= \frac{2k}{k^2 + q^2} \begin{cases} \cos qz \\ \sin qz \end{cases} \\ &\quad - 2 \frac{e^{-\frac{kd}{2}}}{k^2 + q^2} \begin{cases} (k \cos \frac{qd}{2} - q \sin \frac{qd}{2}) \cosh kz \\ (k \sin \frac{qd}{2} + q \cos \frac{qd}{2}) \sinh kz \end{cases} \quad . \quad (3.36) \end{aligned}$$

Da die Randbedingungen für das Potential schon enthalten sind, liefert der Ansatz (3.35) also genau dann Eigenfunktionen des gesamten linearen Systems (3.13), (3.16), wenn der zweite Beitrag der Integration verschwindet. Dazu muss q die transzendente Gleichung

$$\cot \frac{qd}{2} = \frac{q}{k} \quad (3.37)$$

für den oberen bzw.

$$\tan \frac{qd}{2} = -\frac{q}{k} \quad (3.38)$$

für den unteren Fall erfüllen. Damit erhält man abzählbar unendlich viele Lösungen $q^{(\nu)}(k)$ mit

$$(\nu - 1)\frac{\pi}{d} \leq q^{(\nu)} < \nu\frac{\pi}{d}, \quad \nu \geq 1 \quad , \quad (3.39)$$

wobei ungerade ν zu Lösungen von (3.37), gerade ν zu Lösungen von (3.38) gehören. Die Eigenfunktionen bilden einen vollständigen orthogonalen Satz.

Für die Amplitude des magnetostatischen Potentials ergibt sich also

$$\hat{\Psi}_{\mathbf{k}} = -\frac{4\pi i \mathbf{k} \cdot \hat{\boldsymbol{\mu}}_{\perp \mathbf{k}}}{k^2 + q^2} \quad . \quad (3.40)$$

Somit erhält man mit dem Ansatz (3.35) aus der Linearisierung (3.13) eine gewöhnliche lineare zweidimensionale Differentialgleichung für $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\perp \mathbf{k}}$, deren Eigenwerte und –vektoren zunächst ohne treibendes Feld sowie dann störungstheoretisch für den getriebenen Fall bestimmt werden können.

3.4.3 Genäherte Moden für isotropen Austausch

Berücksichtigt man den vollen isotropen Austausch, werden, wie oben geschildert, zur Festlegung des linearen Randwertproblems zusätzlich Randbedingungen für die Magnetisierung benötigt. Da die exakten Eigenmoden des ungetriebenen Systems in z -Richtung recht kompliziert sind, werden oft genäherte Moden verwendet [El96, Kali]⁷. Dabei wird die Dipolarwechselwirkung als Störung behandelt. Die Eigenmoden des ungestörten Systems ergeben sich mit den zugehörigen Randbedingungen für die Magnetisierung (2.9), die wegen der Austauschwechselwirkung in z -Richtung notwendig sind. In erster Ordnung Störungstheorie liefert das magnetostatische Potential einen Beitrag, der sich durch die Projektion auf die entsprechende Eigenmode ergibt.

⁷Auch bei Rayleigh–Bénard–Konvektion, wo sich für feste Randbedingungen ebenfalls ein Polynom dritten Grades in q^2 ergibt, sind solche Näherungsverfahren üblich [Chan].

Wir betrachten hier den allgemeinen Fall gemischter Randbedingungen

$$\left[\partial_z \boldsymbol{\mu}_{\perp \mathbf{k}} \pm \zeta \boldsymbol{\mu}_{\perp \mathbf{k}} \right]_{z=\pm \frac{d}{2}} = 0 \quad , \quad (3.41)$$

die Eigenmoden ohne Parität hervorrufen. Damit liefert der Ansatz

$$\boldsymbol{\mu}_{\perp \mathbf{k}}(z) = \hat{\boldsymbol{\mu}}_{\perp \mathbf{k}} f^{(\nu)}(z), \quad (3.42)$$

$$f^{(\nu)}(z) = a^{(\nu)} \cos q^{(\nu)} z + b^{(\nu)} \sin q^{(\nu)} z \quad (3.43)$$

ein homogenes Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten $a^{(\nu)}, b^{(\nu)}$; daraus ergibt sich wiederum eine implizite Gleichung zur Bestimmung von $q^{(\nu)}$:

$$\sin q^{(\nu)} d = \frac{2q^{(\nu)} \zeta}{(q^{(\nu)})^2 + \zeta^2} \quad \text{für} \quad \zeta > 0 \quad (3.44)$$

Diese Gleichung liefert unendlich viele Lösungen für q , die aber anders als beim XY-Modell nicht vom Wellevektor \mathbf{k} , sondern nur vom fest gewählten Wert von ζ abhängen. Mit den berechneten Koeffizienten $a^{(\nu)}$ und $b^{(\nu)}$ lauten die Eigenfunktionen für gemischte Randbedingungen

$$f^{(\nu)}(z) = 2q^{(\nu)} \zeta \cos q^{(\nu)} z + (\zeta^2 - (q^{(\nu)})^2) \sin q^{(\nu)} z \quad . \quad (3.45)$$

Die Projektion des Potentials (3.33) in linearer Ordnung auf eine Eigenfunktion führt zu einem Beitrag

$$\Psi_{\mathbf{k}}^{(\nu)}(z) = -4\pi i \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\mu}_{\perp \mathbf{k}}^{(\nu)}(z) \frac{1 + R_{\mathbf{k}}^{(\nu)}}{k^2 + (q^{(\nu)})^2} \quad (3.46)$$

mit

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{k}}^{(\nu)} = e^{-\frac{k d}{2}} & \left(2q^{(\nu)} \zeta \left(\frac{q^{(\nu)}}{k} \sin \frac{q^{(\nu)} d}{2} - \cos \frac{q^{(\nu)} d}{2} \right) \frac{(f^{(\nu)}(z) | \cosh k z)}{(f^{(\nu)}(z) | f^{(\nu)}(z))} \right. \\ & \left. + ((q^{(\nu)})^2 - \zeta^2) \left(\sin \frac{q^{(\nu)} d}{2} + \frac{q^{(\nu)}}{k} \cos \frac{q^{(\nu)} d}{2} \right) \frac{(f^{(\nu)}(z) | \sinh k z)}{(f^{(\nu)}(z) | f^{(\nu)}(z))} \right) \quad , \quad (3.47) \end{aligned}$$

wobei die auftretenden Skalarprodukte durch

$$(a(z) | b(z)) = \frac{1}{d} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} a(z) b(z) dz \quad (3.48)$$

gegeben sind.

3.5 Bestimmung der Schwelle

Treibt man den ferromagnetischen Film mit dem periodischen Magnetfeld

$$h(t) = 2h_0 \cos \Omega t \quad , \quad (3.49)$$

lässt sich auf der Grundlage der vorangegangenen Abschnitte die kritische Amplitude h_c bestimmen, bei der die homogene stationäre Lösung (3.1) gegen räumlich inhomogene Störungen mit dem Wellenvektor \mathbf{k}_c instabil wird. Skaliert man den Dämpfungsparameter Γ und die Stärke des treibendes Feldes h_0 mit dem Kleinheitsparameter η , ergibt sich aus (3.13) mit den aus dem vorigen Abschnitt bekannten räumlichen Eigenmoden eine Differentialgleichung der Form (A.1):

$$\partial_t \hat{\boldsymbol{\mu}}_{\perp \mathbf{k}}^{(\nu)} = \underline{\underline{L}}_0(\mathbf{k}, q^{(\nu)}) \hat{\boldsymbol{\mu}}_{\perp \mathbf{k}}^{(\nu)} + \eta \underline{\underline{L}}_1(\mathbf{k}, q^{(\nu)}) \hat{\boldsymbol{\mu}}_{\perp \mathbf{k}}^{(\nu)} + \mathcal{O}(\eta^2) \quad , \quad (3.50)$$

wobei die konkreten Ausdrücke für $\underline{\underline{L}}_0, \underline{\underline{L}}_1$ unten aufgeführt werden. Damit lässt sich die in Anhang A bereitgestellte Störungstheorie zur Berechnung der Instabilitätsschwelle anwenden.

3.5.1 Instabilität des XY-Modells

Ungetriebenes System

Mit dem Ansatz (3.23) und der Amplitude des Potentials (3.40) ergibt sich aus der Linearisierung (3.13) für das ungedämpfte und ungetriebene System der lineare Operator

$$\underline{\underline{L}}_0(\mathbf{k}, q^{(\nu)}) = \begin{pmatrix} -\frac{4\pi k_x k_y}{k^2 + q^{(\nu)2}} & -(H + Jk^2 + \frac{4\pi k_y^2}{k^2 + q^{(\nu)2}}) \\ H - a + \frac{4\pi k_x^2}{k^2 + q^{(\nu)2}} & \frac{4\pi k_x k_y}{k^2 + q^{(\nu)2}} \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

mit der Abkürzung

$$H = H_0 - 4\pi + b \quad . \quad (3.52)$$

Der Operator besitzt die zugehörigen Eigenwerte und Eigenvektoren

$$\omega_{\mathbf{k}}^{(\nu)2} = (H + Jk^2) \left(H - a + Jk^2 + \frac{4\pi k^2}{k^2 + q^{(\nu)2}} \right) - \frac{4\pi a k_y^2}{k^2 + q^{(\nu)2}} \quad (3.53)$$

$$\underline{\underline{u}}_{\mathbf{k}\pm}^{(\nu)} = \begin{pmatrix} \pm i\omega_{\mathbf{k}}^{(\nu)} - \frac{4\pi k_x k_y}{k^2 + q^{(\nu)2}} \\ H - a + Jk^2 + \frac{4\pi k_x^2}{k^2 + q^{(\nu)2}} \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

$$\underline{\underline{v}}_{\mathbf{k}\pm}^{*(\nu)} = \left(\pm i\omega_{\mathbf{k}}^{(\nu)} - \frac{4\pi k_x k_y}{k^2 + q^{(\nu)2}}, - \left(H + Jk^2 + \frac{4\pi k_y^2}{k^2 + q^{(\nu)2}} \right) \right) \quad . \quad (3.55)$$

Wie man am Eigenwertspektrum (3.53) erkennt, nehmen die Moden für XY -Austauschwechselwirkung einen Zwischenstatus ein zwischen den Grenzfällen der magnetostatischen und Austausch-dominierten Moden [CoSl]: Während für $\mathbf{k} \rightarrow 0$ wie bei magnetostatischen Moden alle Eigenwerte $\omega_0^{(\nu)}$ entartet sind, entspricht das Verhalten für $\mathbf{k} \rightarrow \infty$ dem der Austausch-Moden.

Weiterhin lässt sich an (3.53) erkennen, dass die Rotationsinvarianz des Systems gebrochen ist, denn wegen der Anisotropie in M_x -Richtung trägt das Dipolarfeld, das Spin- und Ortsraum koppelt, einen Term bei, der explizit die Richtung des Wellenvektors enthält.

Störung durch treibendes Feld und Dämpfung

In der Ordnung η erzeugt das treibende Feld eine Störung, die zu einer Instabilität des Systems führt. Mit $h(t)$ (3.49) lässt sich der Operator $\underline{\underline{L}}_1$ gemäß (A.3) in die Anteile der Dämpfung und des treibenden Feldes zerlegen:

$$\underline{\underline{L}}_{10} = -\Gamma \begin{pmatrix} H - a + Jk^2 & 0 \\ 0 & H + Jk^2 \end{pmatrix} - \Gamma \frac{4\pi}{k^2 + q^{(\nu)2}} \begin{pmatrix} k_x^2 & k_x k_y \\ k_x k_y & k_y^2 \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

$$\underline{\underline{L}}_{11} = h_0 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

Eine Instabilität tritt in der Resonanz auf, d. h. für ein treibendes Feld mit der Frequenz $\Omega = 2\omega_{\mathbf{k}}$. Mit (A.28) ergibt sich unter Verwendung der Rechts- und Linkseigenvektoren des ungestörten Systems (3.54) und (3.55) für die Eigenwerte in erster Ordnung

$$\lambda_{1\pm} = -\Gamma \left(H + Jk^2 - \frac{a}{2} + \frac{2\pi k^2}{k^2 + q^{(\nu)2}} \right) \pm \frac{h_0}{2\omega_{\mathbf{k}}^{(\nu)}} \sqrt{\left(\frac{4\pi k^2}{k^2 + q^{(\nu)2}} + a \right)^2 - \frac{16\pi a k_x^2}{k^2 + q^{(\nu)2}}} \quad (3.58)$$

Daraus lässt sich für $\lambda_{1+} = 0$ eine Instabilität gegen räumlich inhomogene Störungen mit dem Wellenvektor \mathbf{k} ableiten, die bei einem treibenden Feld mit der Amplitude

$$h_0(\mathbf{k}) = 2\Gamma\omega_{\mathbf{k}}^{(\nu)} \frac{H + Jk^2 - \frac{a}{2} + \frac{2\pi k^2}{k^2 + q^{(\nu)2}}}{\sqrt{\left(\frac{4\pi k^2}{k^2 + q^{(\nu)2}} + a \right)^2 - \frac{16\pi a k_x^2}{k^2 + q^{(\nu)2}}}} \quad (3.59)$$

auftritt. Die Stärke des treibenden Feldes ist demnach wegen der kombinierten Wirkung der Anisotropie und des Dipolarfeld wie die Eigenwerte von der Richtung von \mathbf{k} abhängig. Die niedrigste Instabilität tritt bei dem kritischen Wellenvektor auf, für

den h_0 minimal wird. Wie aus (3.59) unmittelbar folgt, ergibt sich dieses Minimum im Fall $a > 0$ für $k_x = 0, k_y = k_c$. Dabei berechnet sich k_c aus der Bedingung

$$\left. \frac{\partial \operatorname{Re} \lambda_{1+}}{\partial k_y} \right|_{k_x=0} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \left. \frac{\partial h_0}{\partial k_y} \right|_{k_x=0} = 0 \quad . \quad (3.60)$$

Außerdem kann man sich anhand der Abhängigkeit des treibenden Feldes von q davon überzeugen, dass die niedrigste Instabilität für die Eigenmode in z -Richtung auftritt, für die $q_c := q^{(1)}(k_c)$ gilt.

Damit erhält man für das kritische treibende Feld⁸

$$h_c = 2\Gamma\omega_c \frac{H + Jk_c^2 - \frac{a}{2} + \frac{2\pi k_c^2}{k_c^2 + q_c^2}}{\frac{4\pi k_c^2}{k_c^2 + q_c^2} + a} \quad , \quad (3.61)$$

das bei einer Frequenz $\Omega_c = 2\omega_c$ eine Instabilität verursacht. Die kritischen Parameter des treibenden Feldes und die kritischen Wellenzahlen sind in Abbildung 3.1 dargestellt.

Im Fall $a < 0$ tritt entsprechend die niedrigste Instabilität auf, wenn für den kritischen Wellenvektor $k_y = 0$ gilt und die Bedingung $\left. \frac{\partial h_0}{\partial k_x} \right|_{k_y=0} = 0$ erfüllt ist.

3.5.2 Genäherte Instabilität bei isotropem Austausch

Für die genäherten Eigenmoden des Systems mit isotropem Austausch sind die linearen Operatoren gegenüber dem XY -Modell leicht modifiziert; sie ergeben sich mit den Ersetzungen

$$Jk^2 \rightarrow J(k^2 + (q^{(\nu)})^2) \quad \text{und} \quad \frac{4\pi}{k^2 + (q^{(\nu)})^2} \rightarrow \frac{4\pi}{k^2 + (q^{(\nu)})^2} (1 + R_k^{(\nu)}) \quad . \quad (3.62)$$

Ungetriebenes System

Man erhält unter Berücksichtigung von (3.62) für die Eigenwerte

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbf{k}}^{(\nu)2} = & \left(H + J(k^2 + (q^{(\nu)})^2) \right) \left(H - a + J(k^2 + (q^{(\nu)})^2) + \frac{4\pi k^2}{k^2 + (q^{(\nu)})^2} (1 + R_k^{(\nu)}) \right) \\ & - \frac{4\pi a k_y^2 (1 + R_k^{(\nu)})}{k^2 + (q^{(\nu)})^2} \end{aligned} \quad (3.63)$$

⁸Der Index c gibt an, dass jeweils $\mathbf{k} = \mathbf{k}_c$ eingesetzt wurde.

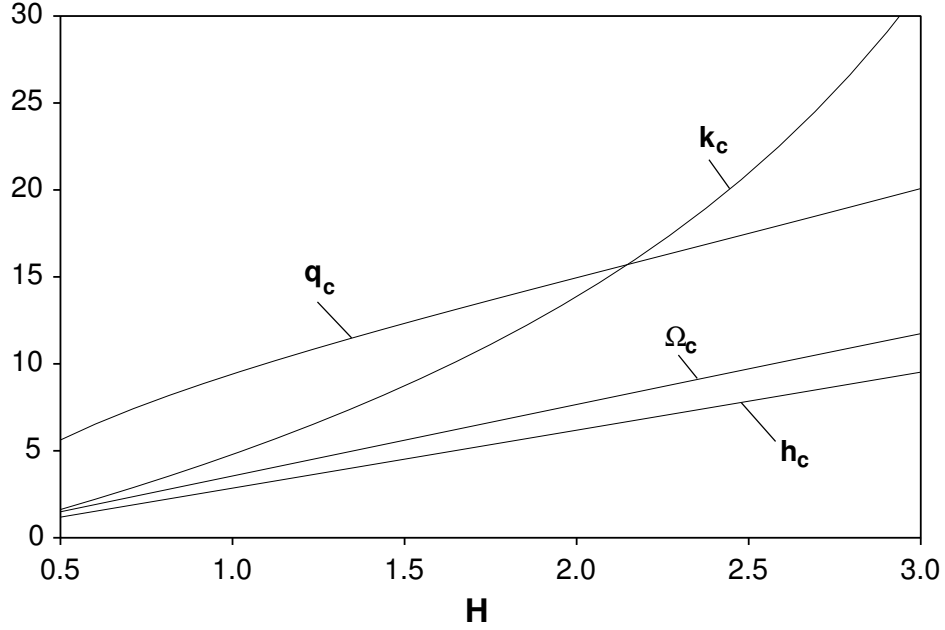


Abbildung 3.1: Instabilitätsschwelle des XY -Modells. Dargestellt sind die Stärke h_c und die Frequenz Ω_c des kritischen treibenden Feldes sowie die kritischen Wellenzahlen k_c und q_c in Abhängigkeit von H (3.52). Für die Parameter a und J werden exemplarisch $a = 0.12$ und $J = 2.5 \cdot 10^{-6}$ angenommen. Damit die Wellenzahlen von der Größenordnung 1 sind, wodurch die gekoppelten impliziten Gleichungen (3.37) und (3.60) einfacher gelöst werden können, wurde als Dicke $\tilde{d} = 0.1$ gewählt, was durch eine entsprechende Umskalierung der Austauschkonstante und des magnetostatischen Potentials immer möglich ist.

sowie analoge Ausdrücke für die ungestörten Rechts- und Linkseigenvektoren (vgl. (3.54) und (3.55)).

Das genäherte Eigenwertspektrum weist im Gegensatz zum XY -Modell auf Grund der Austauschwechselwirkung in z -Richtung eine Aufspaltung für $\mathbf{k} \rightarrow 0$ auf⁹. Es zeigt eine gute Übereinstimmung mit den exakten Eigenmoden bei isotroper Austauschwechselwirkung [Kali].

Getriebenes System

Analog zum XY -Modell ergibt sich in der Resonanz unter Berücksichtigung von (3.62) ein entsprechender Ausdruck für λ_1 . Die niedrigste Instabilität tritt für $a > 0$ wieder dann auf, wenn $\mathbf{k}_c = k_c \mathbf{e}_y$ gilt und für Eigenmode in z -Richtung $\nu = 1$ ist.

⁹Da die Instabilität bei $\mathbf{k}_c \neq 0$ auftritt, ist dieses Phänomen hier aber nicht essentiell.

Mit $q^{(1)} =: q_c$ liegt die Instabilitätsschwelle bei¹⁰

$$h_c = 2\Gamma\omega_c \frac{H + J(k_c^2 + q_c^2) - \frac{a}{2} + \frac{2\pi k_c^2}{k_c^2 + q_c^2}(1 + R_c)}{\frac{4\pi k_c^2}{k_c^2 + q_c^2}(1 + R_c) + a}, \quad (3.64)$$

wobei k_c durch die Bedingung (3.60) festgelegt wird und die kritische Frequenz wieder durch $\Omega_c = 2\omega_c$ gegeben ist. Die Ergebnisse der linearen Stabilitätsanalyse für die genäherten Moden bei isotropem Austausch sind in Abbildung 3.5.2 graphisch dargestellt.

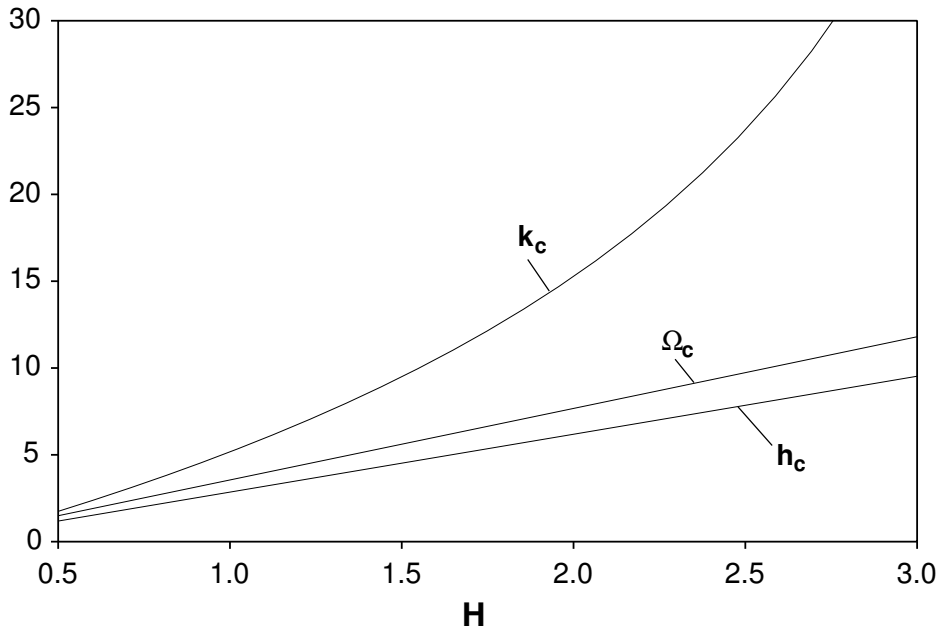


Abbildung 3.2: Genäherte Instabilität bei isotropem Austausch mit gemischten Randbedingungen ($\zeta = 1$). Die Darstellung erfolgt analog zu Abbildung 3.1, wobei die kritische Eigenmode q_c nicht von k abhängt. Im Vergleich zu der Instabilität beim XY -Modell erkennt man, dass die kritische Wellenzahl zwar stärker anwächst, dies aber auf Grund der k -unabhängigen Eigenmode in z -Richtung zu einer fast identischen Instabilitätsschwelle führt. Für die lineare Instabilität scheint es also kaum eine Rolle zu spielen, ob man die Austauschwechselwirkung in z -Richtung vernachlässigt oder sie genähert berücksichtigt.

¹⁰Die Eigenmode in Richtung der Filmdicke wird hier nicht von der Größe der kritischen Wellenzahl beeinflusst.

Kapitel 4

Ableitung der allgemeinen Amplitudengleichung

In diesem Kapitel sollen für allgemeine dynamische Systeme, die in ihrer Struktur dem ferromagnetischen Film entsprechen, Amplitudengleichungen abgeleitet werden, die die raum-zeitliche Dynamik schwach oberhalb der Instabilitätsschwelle einer homogenen stationären Lösung beschreiben. Dazu muss der allgemeine Formalismus [JustW] auf Systeme erweitert werden, bei denen zur vollständigen Beschreibung neben der dynamischen Bewegungsgleichung zusätzlich eine verallgemeinerte Potentialgleichung notwendig ist. Wir stellen zunächst die zugrunde liegenden allgemeinen Bewegungsgleichungen in einer geeigneten Notation bereit und formulieren die Voraussetzungen an die Instabilität. In einer Multiple-Scale-Analyse ergibt sich in jeder Ordnung statt der ursprünglichen nichtlinearen eine inhomogene lineare Gleichung. Dabei gehen wir insbesondere auf die Modifikationen durch die zusätzliche verallgemeinerte Potentialgleichung ein. Aus der Säkularbedingung ergibt sich in dritter Ordnung eine komplexe Ginzburg-Landau-Gleichung für die Dynamik der Amplitude. Die berechneten Koeffizienten dieser Gleichung können dann für ein konkretes System ausgewertet werden.

Bei der Separation der Ordnungen tritt in der zweiten Ordnung bei der Integration der Potentialgleichung (4.52) der Integraloperator \mathcal{J}_{L0} auf, der hier als regulär vorausgesetzt wird. Wie wir aber bei der Berechnung der Koeffizienten für den ferromagnetischen Film in Kapitel 5 sehen werden, wird dieser beim magnetostatischen Potential singulär. Dies hat zwar auf Grund der Potentialeigenschaft in der niedrigsten Ordnung keine Auswirkung auf die Amplitudengleichung, führt aber durch eine Entwicklung bis zur relevanten Ordnung auf nichtlokale Beiträge, die in Kapitel 6 analysiert werden.

Die Ableitung bezieht sich auf anisotrope Systeme, bei denen der kritische Wellenvektor eine ausgezeichnete Richtung aufweist; bei isotropen Systemen wird nämlich

ein ganzer Kreis von Wellenvektoren instabil, und es existiert keine Ableitung oberhalb der Schwelle, die es ermöglicht, dieses Kontinuum zu berücksichtigen. Bei der Beschränkung auf einen kritischen Wellenvektor in einer festgelegten Richtung müssen parallel und senkrecht zu dieser Richtung langsame Ortsskalen verschiedener Ordnung gewählt werden. Dabei ist es bei einer Instabilität gegen laufende Wellen nicht möglich, sich auf eine relevante Ortsskala in jeder Dimension zu beschränken [BLN]¹. Bei der Analyse von Mean-Drift-Effekten führt die unterschiedliche Skalierung der beiden Raumrichtungen zu Beiträgen der Amplitudengleichung, die von verschiedener Ordnung des Kleinheitsparameters sind [ZiSi].

4.1 Bewegungsgleichungen

Dynamische Gleichung

Wir untersuchen die allgemeine partielle Differentialgleichung der Form

$$\partial_t \underline{m} = \mathcal{L}_a \underline{m} + \mathcal{L}_b \underline{\Phi} + \mathcal{N}[\underline{m}, \underline{\Phi}] \quad \text{mit} \quad \underline{m} \in \mathbb{R}^{N_1}, \underline{\Phi} \in \mathbb{R}^{N_2} \quad . \quad (4.1)$$

Die Geometrie entspreche einem Film, das heißt das System hat in der x, y -Ebene eine große Ausdehnung, während \underline{m} in der z -Richtung auf eine kleine Dicke d beschränkt ist. Die Bezeichnungen sind in Anlehnung an das ferromagnetische System gewählt, können aber auch beliebige andere Observable repräsentieren.

Das System habe o. B. d. A.² die homogene stationäre Lösung $\underline{m} = 0$. Die linearen und nichtlinearen Operatoren können Differentialoperatoren beliebiger Ordnung enthalten, und ihre Koeffizienten sind explizit zeitabhängig mit der Periode T . Die linearen Operatoren haben also die Form

$$\mathcal{L}_{a/b} = \sum_{\alpha\beta\gamma} \partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_z^\gamma \underline{L}_{a/b}^{(\alpha\beta\gamma)} \quad . \quad (4.2)$$

Der nichtlineare Operator enthält bis zur dritten Ordnung die Beiträge³

$$\mathcal{N}[\underline{m}, \underline{\Phi}] = \mathcal{N}_{2a}[\underline{m}, \underline{m}] + \mathcal{N}_{2b}[\underline{m}, \underline{\Phi}] + \mathcal{N}_{3a}[\underline{m}, \underline{m}, \underline{m}] + \mathcal{N}_{3b}[\underline{m}, \underline{m}, \underline{\Phi}] + \mathcal{O}(4) \quad , \quad (4.3)$$

¹Dort wird in der Amplitudengleichung zwar nur jeweils eine Ortsskala x, y aufgeführt; man sieht aber sofort, dass die Terme von verschiedener Größenordnung sind, was unterschiedlichen Skalen entspricht.

²Dies kann für homogene Lösungen durch eine Koordinatentransformation $\underline{m} \rightarrow \underline{m} - \underline{m}_0$ immer erreicht werden.

³Wir nehmen an, dass kein Beitrag $\mathcal{N}_{3c}[\underline{m}, \underline{\Phi}, \underline{\Phi}]$ auftritt; er könnte aber ohne Schwierigkeiten berücksichtigt werden.

die sich folgendermaßen darstellen lassen:

$$\underline{\mathcal{N}}_{2a/b}[\underline{f}, \underline{g}] = \sum_{\alpha_j \beta_j \gamma_j} \underline{B}_{a/b}^{(\alpha_j \beta_j \gamma_j)} \{ \partial_x^{\alpha_1} \partial_y^{\beta_1} \partial_z^{\gamma_1} \underline{f}, \partial_x^{\alpha_2} \partial_y^{\beta_2} \partial_z^{\gamma_2} \underline{g} \} \quad (4.4)$$

$$\underline{\mathcal{N}}_{3a/b}[\underline{f}, \underline{g}, \underline{h}] = \sum_{\alpha_j \beta_j \gamma_j} \underline{D}_{a/b}^{(\alpha_j \beta_j \gamma_j)} \{ \partial_x^{\alpha_1} \partial_y^{\beta_1} \partial_z^{\gamma_1} \underline{f}, \partial_x^{\alpha_2} \partial_y^{\beta_2} \partial_z^{\gamma_2} \underline{g}, \partial_x^{\alpha_3} \partial_y^{\beta_3} \partial_z^{\gamma_3} \underline{h} \} \quad (4.5)$$

Die explizit zeitabhängigen Koeffizienten der Bi- bzw. Trilinearformen lassen sich wie folgt entwickeln:

$$\left(\underline{B}_{a/b}^{(\alpha_j \beta_j \gamma_j)} \{ \underline{u}, \underline{v} \} \right)_k := \sum_{lm} b_{a/b, k, lm}^{(\alpha_j \beta_j \gamma_j)} u_l v_m \quad (4.6)$$

$$\left(\underline{D}_{a/b}^{(\alpha_j \beta_j \gamma_j)} \{ \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \} \right)_k := \sum_{lmn} d_{a/b, k, lmn}^{(\alpha_j \beta_j \gamma_j)} u_l v_m w_n \quad (4.7)$$

Die Koeffizienten der nichtlinearen Beiträge, die mehrfach \underline{m} enthalten, sind symmetrisch bezüglich einer Vertauschung der betreffenden Indizes; es gilt also zum Beispiel

$$b_{a, k, lm}^{(\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 \gamma_1 \gamma_2)} = b_{a, k, ml}^{(\alpha_2 \alpha_1 \beta_2 \beta_1 \gamma_2 \gamma_1)} \quad . \quad (4.8)$$

Verallgemeinerte Potentialgleichung

Zur vollständigen Beschreibung des Systems benötigt man zusätzlich zu der dynamischen Gleichung (4.1) eine verallgemeinerte Potentialgleichung, die die folgende Form haben soll:

$$\ell_a \underline{\Phi} = \ell_b \underline{m} + \underline{n}[\underline{m}] \quad . \quad (4.9)$$

Diese lineare inhomogene Differentialgleichung beschreibt die räumlichen Variationen von $\underline{\Phi}$, besitzt aber keine eigene zeitliche Dynamik, sondern folgt instantan der von \underline{m} vorgegebenen. Die benötigten Randbedingungen und die Beschränkung von \underline{m} auf die Filmdicke sollen dabei auf der rechten Seite in der Inhomogenität automatisch enthalten sein⁴. Ohne diese Forderung ist es nicht möglich, eine zusätzliche Gleichung in der allgemeinen Form (4.9) zu berücksichtigen, da $\underline{\Phi}$ andernfalls in jeder Ordnung mit den speziellen zugehörigen Randbedingungen des jeweiligen Problems integriert werden müsste. Die Operatoren können also wie bei der dynamischen Gleichungen beliebige räumliche Ableitungen enthalten, zusätzlich lassen wir aber auf der rechten Seite noch eine z -Abhängigkeit der Koeffizienten zu, die

⁴Diese Technik wird in der Regel nicht angewendet, obwohl sie natürlich immer eine alternative Behandlung von Randwertproblemen darstellt. Für eine allgemeine Ableitung der Amplitudengleichung ist sie hier aber zwingend notwendig.

geeignete Funktionen zur Berücksichtigung dieser Bedingungen repräsentiert. Damit haben die linearen Operatoren die Form

$$\ell_a = \sum_{\alpha\beta\gamma} l_{\underline{a}}^{(\alpha\beta\gamma)} \partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_z^\gamma \quad (4.10)$$

$$\ell_b = \sum_{\alpha\beta\gamma} l_{\underline{b}}^{(\alpha\beta\gamma)}(z) \partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_z^\gamma \quad . \quad (4.11)$$

Der nichtlineare Term enthält beispielsweise beim magnetostatischen Potential den entwickelten Beitrag von m_z (vgl. (3.4)) und lautet einschließlich der dritten Ordnung

$$n[\underline{m}] = n_2[\underline{m}, \underline{m}] + n_3[\underline{m}, \underline{m}, \underline{m}] + \mathcal{O}(4) \quad . \quad (4.12)$$

Analog zur dynamischen Gleichung gilt dabei

$$n_2[\underline{f}, \underline{g}] = \sum_{\alpha_j\beta_j\gamma_j} \underline{F}^{(\alpha_j\beta_j\gamma_j)}(z) \{ \partial_x^{\alpha_1} \partial_y^{\beta_1} \partial_z^{\gamma_1} \underline{f}, \partial_x^{\alpha_2} \partial_y^{\beta_2} \partial_z^{\gamma_2} \underline{g} \} \quad (4.13)$$

$$n_3[\underline{f}, \underline{g}, \underline{h}] = \sum_{\alpha_j\beta_j\gamma_j} \underline{G}^{(\alpha_j\beta_j\gamma_j)}(z) \{ \partial_x^{\alpha_1} \partial_y^{\beta_1} \partial_z^{\gamma_1} \underline{f}, \partial_x^{\alpha_2} \partial_y^{\beta_2} \partial_z^{\gamma_2} \underline{g}, \partial_x^{\alpha_3} \partial_y^{\beta_3} \partial_z^{\gamma_3} \underline{h} \} \quad , \quad (4.14)$$

wobei die zugehörigen Koeffizienten von $\underline{F}^{(\alpha_j\beta_j\gamma_j)}(z)$ und $\underline{G}^{(\alpha_j\beta_j\gamma_j)}(z)$ analog zu (4.6) bzw. (4.7) definiert sind.

Wir setzen voraus, dass die vollständige Lösung von (4.9) bekannt ist und sich mit den zugehörigen Integraloperatoren⁵ durch

$$\underline{\Phi} = \mathcal{J}_L \underline{m} + \mathcal{J}_N n[\underline{m}] \quad (4.15)$$

darstellen lässt.

Spektraldarstellungen

Da Instabilitäten bezüglich der ebenen Wellen $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ untersucht werden, benötigt man im folgenden die Spektraldarstellungen der linearen Operatoren, die sich aus (4.2) bzw. (4.10) und (4.11) durch Anwendung der Differentialoperatoren auf eine Fouriermode ergeben:

$$\mathcal{L}_{a/b} \underline{u}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \sum_{\alpha\beta\gamma} (ik_x)^\alpha (ik_y)^\beta \partial_z^\gamma \underline{L}_{\underline{a}/b}^{(\alpha\beta\gamma)} \underline{u}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} =: \mathcal{L}_{a/b\mathbf{k}} \underline{u}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad (4.16)$$

$$\ell_{a/b} \psi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \sum_{\alpha\beta\gamma} (ik_x)^\alpha (ik_y)^\beta \partial_z^\gamma \underline{l}_{\underline{a}/b}^{(\alpha\beta\gamma)} \psi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} =: \ell_{a/b\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad (4.17)$$

⁵Dabei gilt $\mathcal{J}_L = \mathcal{J}_N \ell_b$.

Die Nichtlinearitäten treten in der Ableitung immer für Beiträge mit Exponentialanteilen der Form $e^{i\mathbf{k}\mathbf{c}\mathbf{r}}$ auf. Daher ist es praktisch, die folgenden Abkürzungen einzuführen:

$$\underline{B}_{a/b}^{(mn)}(\underline{u}, \underline{v}) := \sum_{\alpha_j \beta_j \gamma_j} (imk_{cx})^{\alpha_1} (imk_{cy})^{\beta_1} \partial_z^{\gamma_1} (imk_{cx})^{\alpha_2} (imk_{cy})^{\beta_2} \partial_z^{\gamma_2} \underline{B}_{a/b}^{(\alpha_j \beta_j \gamma_j)} \{\underline{u}, \underline{v}\} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \underline{D}_{a/b}^{(lmn)}(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) := & \sum_{\alpha_j \beta_j \gamma_j} (ilk_{cx})^{\alpha_1} (ilk_{cy})^{\beta_1} \partial_z^{\gamma_1} (imk_{cx})^{\alpha_2} (imk_{cy})^{\beta_2} \partial_z^{\gamma_2} \\ & \cdot (imk_{cx})^{\alpha_3} (imk_{cy})^{\beta_3} \partial_z^{\gamma_3} \underline{D}_{a/b}^{(\alpha_j \beta_j \gamma_j)} \{\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}\} \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\underline{F}^{(mn)}(\underline{u}, \underline{v}) := \sum_{\alpha_j \beta_j \gamma_j} (imk_{cx})^{\alpha_1} (imk_{cy})^{\beta_1} \partial_z^{\gamma_1} (imk_{cx})^{\alpha_2} (imk_{cy})^{\beta_2} \partial_z^{\gamma_2} \underline{F}^{(\alpha_j \beta_j \gamma_j)} \{\underline{u}, \underline{v}\} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \underline{G}^{(lmn)}(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) := & \sum_{\alpha_j \beta_j \gamma_j} (ilk_{cx})^{\alpha_1} (ilk_{cy})^{\beta_1} \partial_z^{\gamma_1} (imk_{cx})^{\alpha_2} (imk_{cy})^{\beta_2} \partial_z^{\gamma_2} \\ & \cdot (imk_{cx})^{\alpha_3} (imk_{cy})^{\beta_3} \partial_z^{\gamma_3} \underline{G}^{(\alpha_j \beta_j \gamma_j)} \{\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}\} \end{aligned} \quad (4.21)$$

4.2 Die Instabilitätsschwelle

Floquet–Problem

Zur Klassifizierung der Instabilität sollen zunächst die Voraussetzungen für das Floquet–Problem festgelegt werden, das sich auf Grund der expliziten Zeitabhängigkeit der dynamischen Gleichung ergibt. Setzt man die lineare Lösung von (4.9) in die lineare dynamische Gleichung ein:

$$\partial_t \underline{m} = (\mathcal{L}_a + \mathcal{L}_b \mathcal{J}_l) \underline{m} =: \tilde{\mathcal{L}} \underline{m} \quad , \quad (4.22)$$

erhält man ein lineares, explizit zeitabhängiges System für \underline{m} mit dem Integro–Differentialoperator $\tilde{\mathcal{L}}$. Bezüglich der Instabilität gegen räumlich inhomogene Störungen ergibt sich also das Floquet–Problem des explizit zeitabhängigen linearen Operators

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{k}} := \mathcal{L}_{a\mathbf{k}} + \mathcal{L}_{b\mathbf{k}} \mathcal{J}_{L\mathbf{k}} \quad , \quad (4.23)$$

wobei $\mathcal{J}_{L\mathbf{k}}$ die Fouriertransformierte von \mathcal{J}_L bezeichnet.

Nach dem Floquet–Theorem setzt sich die Lösung von (4.22) aus einem periodischen Anteil $\underline{u}_{\mathbf{k}}(z, t)$ und einer Exponentialfunktion mit dem Floquet–Exponenten $\lambda_{\mathbf{k}}$ zusammen. Für die Rechtseigenvektoren gilt

$$\lambda_{\mathbf{k}}^{(\mu\nu)} \underline{u}_{\mathbf{k}}^{(\mu\nu)}(z, t) + \dot{\underline{u}}_{\mathbf{k}}^{(\mu\nu)}(z, t) = \tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{k}}(t) \underline{u}_{\mathbf{k}}^{(\mu\nu)}(z, t) \quad (4.24)$$

und für die Linkseigenvektoren analog

$$\underline{v}_{\mathbf{k}}^{(\mu\nu)*}(z, t) \lambda_{\mathbf{k}}^{(\mu\nu)} - \dot{\underline{v}}_{\mathbf{k}}^{(\mu\nu)*}(z, t) = \underline{v}_{\mathbf{k}}^{(\mu\nu)*}(z, t) \tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{k}}(t) \quad . \quad (4.25)$$

Dabei bezeichnet der Index μ die Eigenmode in z -Richtung, während ν die N_1 verschiedenen Eigenwertzweige durchnummeriert. Wegen der T -Periodizität lässt sich der Imaginärteil des Floquet-Exponenten auf den Bereich

$$\text{Im } \lambda_{\mathbf{k}}^{(\mu\nu)} \in \left[-\frac{\Omega}{2}, \frac{\Omega}{2} \right] \quad (4.26)$$

beschränken.

Das System soll bei $\mathbf{k} = \mathbf{k}_c$ und $\omega = \omega_c$ eine Instabilität gegen eine laufende Welle aufweisen⁶. Dazu muss das Floquet-Problem folgende Voraussetzungen erfüllen:

- Es existiert ein kritischer Floquet-Exponent $\lambda_{\mathbf{k}_c}^{(\mu_c \nu_c)} =: \lambda_c = i\omega_c$ mit verschwindendem Realteil, während für alle anderen $(\mu\nu)$ $\text{Re } \lambda_{\mathbf{k}}^{(\mu\nu)} < 0$ gelten soll.
- Für den kritischen Wellenvektor \mathbf{k}_c soll der kritische Eigenwert ein Maximum des Spektrums aufweisen, somit gilt⁷

$$\text{Re } \nabla_k \lambda_c = 0 \quad . \quad (4.27)$$

- Wegen der Eigenschaft $\lambda_{\mathbf{k}} = \lambda_{-\mathbf{k}}^*$, die für reelle Systeme immer gilt, ist $-i\omega_c$ kritischer Exponent zum Wellenvektor $-\mathbf{k}_c$.

Der kritische Floqueteigenvektor $\underline{u}_c(z, t)$ hat mit μ_c eine festgelegte z -Abhängigkeit, charakterisiert durch Wellenzahlen q_c , die auch vom kritischen Wellenvektor \mathbf{k}_c in der Ebene abhängen können.

Prinzipiell kann auch eine zweite gegenläufige Welle⁸ auftreten, falls $\omega(\mathbf{k}_c) = \omega(-\mathbf{k}_c)$ ist. Hier wollen wir uns jedoch auf die Ableitung einer Amplitudengleichung für eine instabile Welle in nur einer Richtung beschränken.

⁶Die Spezialfälle der Soft-Mode-Instabilität ($\omega_c = 0$) und der Hard-Mode-Instabilität ($\mathbf{k}_c = 0$) sind darin automatisch enthalten.

⁷Für eine Ableitung an der Stelle des kritischen Eigenvektors $\nabla_k a_{\mathbf{k}}|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_c}$ wird immer die abkürzende Schreibweise $\nabla_k a_c$ verwendet.

⁸Bei gegenläufigen Wellen treten nichtlokale Kopplungsterme auf [KnLu].

Abstand zur Schwelle

Nach dieser Festlegung der Instabilität definieren wir den Abstand zur Schwelle durch die Zerlegung der Operatoren in

$$\mathcal{L}_{a/b} = \mathcal{L}_{a/b}^{(0)} + \varepsilon^2 \mathcal{L}_{a/b}^{(2)} \quad (4.28)$$

$$\mathcal{N}_{a/b} = \mathcal{N}_{a/b}^{(0)} + \varepsilon^2 \mathcal{N}_{a/b}^{(2)} \quad . \quad (4.29)$$

Demzufolge gilt natürlich auch

$$\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{\mathcal{L}}^{(0)} + \varepsilon^2 \tilde{\mathcal{L}}^{(2)} \quad . \quad (4.30)$$

Dabei beschreiben die Operatoren in nullter Ordnung also gerade das System mit den kritischen Parametern, die die Instabilität verursachen. Bei einer Entwicklung bis zur dritten Ordnung tritt für den nichtlinearen Anteil nur der Beitrag $\mathcal{N}_{a/b}^{(0)}$ auf; daher wird der Index hier im folgenden weggelassen. Für die nichtlokale Kopplung wird vorausgesetzt, dass sie keine Parameter enthält, die die Instabilität betreffen.⁹

4.3 Multiple-Scale-Entwicklung

Zur störungstheoretischen Behandlung des Systems (4.1), (4.9) oberhalb der Schwelle werden \underline{m} und $\underline{\Phi}$ gemäß

$$\underline{m} = \varepsilon \underline{m}^{(1)} + \varepsilon^2 \underline{m}^{(2)} + \varepsilon^3 \underline{m}^{(3)} + \dots \quad (4.31)$$

$$\underline{\Phi} = \varepsilon \underline{\Phi}^{(1)} + \varepsilon^2 \underline{\Phi}^{(2)} + \varepsilon^3 \underline{\Phi}^{(3)} + \dots \quad (4.32)$$

entwickelt. Zur Berücksichtigung langsamer räumlicher und zeitlicher Variationen führen wir zusätzlich die Skalen

$$\mathbf{r}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \varepsilon^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad t_n = \varepsilon^n t \quad (4.33)$$

mit $n \geq 1$ ein.

4.4 Säkularbedingung

Bei der Separation der Ordnungen in Abschnitt 4.5 erhalten wir statt der nichtlinearen dynamischen Gleichung nach der Integration der zusätzlichen Gleichung in

⁹Diese Voraussetzung wird der Einfachheit halber gemacht, ist aber nicht notwendig.

jeder Ordnung n eine inhomogene lineare Differentialgleichung der Form

$$\partial_t \underline{m}^{(n)} = \tilde{\mathcal{L}}^{(0)} \underline{m}^{(n)} + \sum_{\mathbf{k}} \underline{w}_{\mathbf{k}}^{(n)}(z, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad . \quad (4.34)$$

Dabei enthält die Inhomogenität Beiträge der niedrigeren Ordnungen; die darin enthaltenen langsamen Skalen werden als fest betrachtet. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung lautet mit den Voraussetzungen für das Floquet–Problem aus Abschnitt 4.2

$$\underline{m}^{(n)}(\mathbf{r}, z, t) = A_n(\mathbf{r}_j, t_j) \underline{u}_c(z, t) e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + \sum_{\mathbf{k}} \int_0^t dt' \mathcal{U}_{\mathbf{k}}(t, t-t') \underline{w}_{\mathbf{k}}^{(n)}(z, t-t') e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \dots \quad (4.35)$$

Dabei ist A_n die Integrationskonstante der homogenen Lösung, die von langsamen Orts- und Zeitskalen abhängen kann, und ... steht für den transienten Anteil der Lösung. Der Zeitentwicklungsoperator $\mathcal{U}_{\mathbf{k}}(t, t')$ ist durch die Differentialgleichung

$$\partial_t \mathcal{U}_{\mathbf{k}}(t, t') = \tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{k}}^{(0)}(t) \mathcal{U}_{\mathbf{k}}(t, t') \quad \text{mit} \quad \mathcal{U}_{\mathbf{k}}(t', t') = 1 \quad (4.36)$$

gegeben; man erhält mit der Spektralzerlegung von $\tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{k}}^{(0)}$

$$\mathcal{U}_{\mathbf{k}}(t, t') = \sum_{\mu\nu} \frac{\left| \underline{u}_{\mathbf{k}}^{(\mu\nu)}(z, t) \right\rangle e^{\lambda_{\mathbf{k}}^{(\mu\nu)}(t-t')} \left(\underline{v}_{\mathbf{k}}^{(\mu\nu)}(z, t') \right|}{\left(\underline{v}_{\mathbf{k}}^{(\mu\nu)}(z, t) \right| \underline{u}_{\mathbf{k}}^{(\mu\nu)}(z, t) \rangle} \quad . \quad (4.37)$$

Die auftretenden Skalarprodukte sind durch

$$(\underline{a}(z) | \underline{b}(z)) := \frac{1}{d} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \langle \underline{a}(z) | \underline{b}(z) \rangle dz \quad (4.38)$$

definiert, wobei $\langle \underline{a}(z) | \underline{b}(z) \rangle$ das übliche Skalarprodukt im \mathbb{C}^n darstellt.

Für $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_c$ haben die Eigenwerte einen negativen Realteil, so dass der inhomogene Anteil von (4.35) exponentiell mit der Zeit abfällt. Der kritische Eigenwert λ_c ist aber rein imaginär; daher könnten für $\mathbf{k} = \mathbf{k}_c$ linear in der Zeit anwachsende Terme entstehen. Zur Vermeidung solcher Säkularterme muss man also fordern, dass die Inhomogenität $\underline{w}_{\mathbf{k}}(z, t)$ keine resonanten Terme enthält, d. h. die Bedingung

$$\lim_{\Theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\Theta} \int_0^{\Theta} e^{-i\omega_c t'} \left(\underline{v}_c(z, t') | \underline{w}_{\mathbf{k}_c}^{(n)}(z, t') \right) dt' = 0 \quad (4.39)$$

muss erfüllt sein.

Die Lösung im stationären Zustand erhält man dann, wenn die obere Integrationsgrenze in (4.35) gegen unendlich geht.¹⁰

4.5 Separation der Ordnungen

Mit dem Multiple-Scale-Ansatz (4.31), (4.32) werden die Bewegungsgleichungen (4.1) und (4.9) in die verschiedenen Ordnungen getrennt. In jeder Ordnung muss zunächst die zusätzliche Gleichung integriert werden.¹¹ Mit dieser Lösung liefern dann die verschiedenen Beiträge zur dynamischen Gleichung eine inhomogene Differentialgleichung (4.34). Die Säkularbedingung (4.39) liefert in der dritten Ordnung eine komplexe Ginzburg-Landau-Gleichung zur Beschreibung der raum-zeitlichen Dynamik schwach oberhalb der Schwelle.

Ordnung ε

Die zusätzliche Gleichung (4.9) in erster Ordnung

$$\ell_a \underline{\Phi}^{(1)} = \ell_b \underline{m}^{(1)} \quad (4.41)$$

hat mit (4.15) die Lösung

$$\underline{\Phi}^{(1)} = \mathcal{J}_L \underline{m}^{(1)}. \quad (4.42)$$

Setzt man diese in die erste Ordnung der dynamischen Gleichung (4.1)

$$\partial_t \underline{m}^{(1)} = \mathcal{L}_a^{(0)} \underline{m}^{(1)} + \mathcal{L}_b^{(0)} \underline{\Phi}^{(1)} \quad (4.43)$$

ein:

$$\partial_t \underline{m}^{(1)} = \mathcal{L}_a^{(0)} \underline{m}^{(1)} + \mathcal{L}_b^{(0)} \mathcal{J}_L \underline{m}^{(1)} = \tilde{\mathcal{L}}^{(0)} \underline{m}^{(1)}, \quad (4.44)$$

¹⁰Für explizit zeitunabhängige Systeme vereinfacht sich (4.35) zu

$$\underline{m}^{(n)}(\mathbf{r}, z, t) = A_n(\mathbf{r}_j, t_j) \underline{u}_c(z) e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + \sum_{\mathbf{k}} \int_0^t dt' e^{\tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{k}}^{(0)} t'} \underline{w}_{\mathbf{k}}^{(n)}(z, t - t') e^{i\mathbf{k} \mathbf{r}} + \dots \quad (4.40)$$

die Säkularbedingung ergibt sich analog zu (4.39), wobei der kritische Linkseigenvektor nicht von der Zeit abhängt. Die stationäre Lösung von (4.40) erhält man wieder, wenn die obere Integrationsgrenze gegen unendlich geht.

¹¹Alternativ kann auch die gesamte Lösung mit Integraloperatoren (4.15) vor der Separation der Ordnungen in die dynamische Gleichung (4.1) eingesetzt werden. Eine kurze Schilderung dieses Zugangs erfolgt bei der Ableitung der nichtlokalen Terme in Kapitel 6.1.

ergibt sich gerade das Floquet–Problem (4.24). Da nach Voraussetzung ein kritischer Eigenwert $\lambda_c = i\omega_c$ bei $\mathbf{k} = \mathbf{k}_c$ existiert, während alle anderen Eigenwerte kleiner als Null sind, erhält man die Lösung

$$\begin{pmatrix} \underline{m}^{(1)} \\ \underline{\Phi}^{(1)} \end{pmatrix} = A_1(\mathbf{r}_n, t_n) \begin{pmatrix} \underline{u}_c(z, t) \\ \underline{\psi}_c(z, t) \end{pmatrix} e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + c.c. + \dots \quad , \quad (4.45)$$

wobei die Abkürzung

$$\underline{\psi}_c = \mathcal{J}_{Lc} \underline{u}_c \quad (4.46)$$

eingeführt wurde und \dots für transiente Terme der stabilen Eigenwertzweige steht, die für große Zeiten vernachlässigbar sind. Die schnelle Trägerwelle wird also mit langsamen räumlichen und zeitlichen Modulationen versehen, die den Beitrag des Bandes instabiler Wellenvektoren oberhalb der Schwelle berücksichtigen und in der Dynamik der Amplitude A_1 enthalten sind.

Ordnung ε^2

Die verallgemeinerte Potentialgleichung (4.9) enthält in zweiter Ordnung verschiedenartige Beiträge:

$$\ell_a \underline{\Phi}^{(2)} = \left(\ell_b \underline{m}^{(2)} \right)^{[0]} + \left(\ell_b \underline{m}^{(1)} \right)^{[1]} - \left(\ell_a \underline{\Phi}^{(1)} \right)^{[1]} + \left(\underline{n}[\underline{m}] \right)^{(2)} \quad . \quad (4.47)$$

Dabei bedeutet $(\dots)^{[n]}$ die Anwendung der Differentialoperatoren in der n -ten Ordnung: Während der erste Beitrag auf der rechten Seite schon durch $\underline{m}^{(2)}$ von zweiter Ordnung ist, enthalten der zweite und dritte Term langsame räumliche Ableitungen, die auf die Lösung der ersten Ordnung (4.45) wirken. Mit den in Anhang B aufgeführten Ableitungen der linearen Spektraloperatoren lauten diese linearen Beiträge

$$\left(\ell_b \underline{m}^{(1)} \right)^{[1]} = (-i)(\nabla_k \cdot \nabla_1) A_1 \ell_{bc} \underline{u}_c e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + c.c. \quad (4.48)$$

$$\left(\ell_a \underline{\Phi}^{(1)} \right)^{[1]} = (-i)(\nabla_k \cdot \nabla_1) A_1 \ell_{ac} \mathcal{J}_{Lc} \underline{u}_c e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + c.c. \quad (4.49)$$

mit¹².

$$\nabla_k = \begin{pmatrix} \partial_{k_x} \\ \partial_{k_y} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla_n = \begin{pmatrix} \partial_{x_n} \\ \partial_{y_n} \end{pmatrix} \quad . \quad (4.50)$$

¹² ∇_k wirkt hier stets auf den ersten folgenden Spektraloperator, während sich ∇_n immer auf die jeweiligen Amplituden auswirkt.

Der letzte, nichtlineare Term ergibt sich einfach durch Einsetzen der Lösung aus der ersten Ordnung (4.45) in \underline{n}_2 (4.13):

$$\left(\underline{n}[\underline{m}]\right)^{(2)} = 2\underline{F}^{(1\bar{1})}(\underline{u}_c, \underline{u}_c^*)|A_1|^2 + \underline{F}^{(11)}(\underline{u}_c, \underline{u}_c)A_1^2 e^{2i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + c.c. \quad (4.51)$$

Dabei wurde die Symmetrie der Koeffizienten berücksichtigt (vgl. (A.32)), und es gilt $\bar{n} = -n$.

Die Gleichung (4.47) kann mit den bekannten Integraloperatoren aus (4.15) integriert werden. Dabei wird aber nicht ersichtlich, welche Bedeutung die Beiträge (4.49) und (4.48) haben. Beachtet man aber die in Anhang C angegebenen Ableitungsrelationen der zusätzlichen Gleichung, liefert die Integration gerade (C.10). Dieser Beitrag ist für die Integration der dynamischen Gleichung wichtig. Damit ergibt sich für die Lösung der zusätzlichen Gleichung (4.9) in zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} \underline{\Phi}^{(2)} &= \mathcal{J}_L \underline{m}^{(2)} + (-i)(\nabla_k \cdot \nabla_1) \mathcal{J}_{Lc} \underline{u}_c A_1 e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + c.c. \\ &+ 2\mathcal{J}_{N0} \underline{F}^{(1\bar{1})}(\underline{u}_c, \underline{u}_c^*)|A_1|^2 + \mathcal{J}_{N2\mathbf{k}_c} \underline{F}^{(11)}(\underline{u}_c, \underline{u}_c)A_1^2 e^{2i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + c.c. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Die dynamische Gleichung (4.1) lautet in zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} \partial_t \underline{m}^{(2)} + \partial_{t_1} \underline{m}^{(1)} &= \left(\mathcal{L}_a^{(0)} \underline{m}^{(2)}\right)^{[0]} + \left(\mathcal{L}_b^{(0)} \underline{\Phi}^{(2)}\right)^{[0]} + \left(\mathcal{L}_a^{(0)} \underline{m}^{(1)}\right)^{[1]} + \left(\mathcal{L}_b^{(0)} \underline{\Phi}^{(1)}\right)^{[1]} \\ &+ \left(\mathcal{N}_{2a}[\underline{m}, \underline{m}]\right)^{(2)} + \left(\mathcal{N}_{2b}[\underline{m}, \underline{\Phi}]\right)^{(2)}, \end{aligned} \quad (4.53)$$

wobei sich die einzelnen Beiträge durch Einsetzen der Lösung der ersten Ordnung (4.45) und der Lösung $\underline{\Phi}^{(2)}$ (4.52) ergeben. Für den zweiten Term auf der linken Seite erhält man also

$$\partial_{t_1} \underline{m}^{(1)} = \underline{u}_c e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} \partial_{t_1} A_1 + c.c. \quad (4.54)$$

Die Beiträge der linearen Terme auf der rechten Seite lauten

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{L}_b^{(0)} \underline{\Phi}^{(2)}\right)^{[0]} &= \mathcal{L}_b^{(0)} \mathcal{J}_L \underline{m}^{(2)} + (-i)\mathcal{L}_{bc}^{(0)} (\nabla_k \cdot \nabla_1) \mathcal{J}_{Lc} \underline{u}_c A_1 e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + c.c. \\ &+ 2\mathcal{L}_{b0}^{(0)} \mathcal{J}_{N0} \underline{F}^{(1\bar{1})}(\underline{u}_c, \underline{u}_c^*)|A_1|^2 \\ &+ \mathcal{L}_{b2\mathbf{k}_c}^{(0)} \mathcal{J}_{N2\mathbf{k}_c} \underline{F}^{(11)}(\underline{u}_c, \underline{u}_c)A_1^2 e^{2i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + c.c. \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\left(\mathcal{L}_a^{(0)} \underline{m}^{(1)}\right)^{[1]} = (-i)(\nabla_k \cdot \nabla_1) A_1 \mathcal{L}_{ac}^{(0)} \underline{u}_c e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + c.c. \quad (4.56)$$

$$\left(\mathcal{L}_b^{(0)} \underline{\Phi}^{(1)}\right)^{[1]} = (-i)(\nabla_k \cdot \nabla_1) A_1 \mathcal{L}_{bc}^{(0)} \mathcal{J}_{Lc} \underline{u}_c e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + c.c. \quad (4.57)$$

Dabei ergeben sich die höheren Beiträge der linearen Operatoren wieder mit (B.2). Fasst man alle Ableitungsterme mit Ortsableitungen der Ordnung ε zusammen, ergibt sich gerade

$$(-i)(\nabla_k \cdot \nabla_1) \tilde{\mathcal{L}}_c^{(0)} A_1 \underline{u}_c e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + c.c. \quad (4.58)$$

In der Regel hängt $\underline{u}_{\mathbf{k}}^{(\nu_c)}$ natürlich von \mathbf{k} ab, so dass \underline{u}_c kein Eigenvektor von $\partial_{k_i} \tilde{\mathcal{L}}_c$ ist. Wie in Anhang D skizziert wird, kann man diese Unabhängigkeit aber immer durch eine Transformation erreichen, ohne dass die Gültigkeit der Ergebnisse eingeschränkt wird.¹³ Geht man also von \mathbf{k} -unabhängigen kritischen Eigenvektoren aus, gilt mit (4.27)

$$\nabla_k \tilde{\mathcal{L}}_c^{(0)} \underline{u}_c = i \nabla_k \omega_c \underline{u}_c \quad . \quad (4.59)$$

Aus den Nichtlinearitäten ergeben sich mit der Lösung der ersten Ordnung (4.45) die Beiträge

$$\left(\underline{\mathcal{N}}_{2a}[\underline{m}, \underline{m}] \right)^{[2]} = \underline{B}_a^{(11)}(\underline{u}_c, \underline{u}_c) A_1^2 e^{2i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + c.c. + 2 \underline{B}_a^{(1\bar{1})}(\underline{u}_c, \underline{u}_c^*) |A_1|^2 \quad (4.60)$$

$$\left(\underline{\mathcal{N}}_{2b}[\underline{m}, \underline{\Phi}] \right)^{[2]} = \underline{B}_b^{(11)}(\underline{u}_c, \underline{\psi}_c) A_1^2 e^{2i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + c.c. + \underline{B}_b^{(1\bar{1})}(\underline{u}_c, \underline{\psi}_c^*) |A_1|^2 + c.c. \quad , \quad (4.61)$$

die alle nicht resonant sind. Fasst man die nichtlinearen Beiträge der Fouriermoden 0 und $2\mathbf{k}_c$ noch mit den nichtresonanten Beiträgen aus (4.55) zusammen:

$$\underline{B}_{2\mathbf{k}_c}(z, t) := \underline{B}_a^{(11)}(\underline{u}_c, \underline{u}_c) + \underline{B}_b^{(11)}(\underline{u}_c, \underline{\psi}_c) + \mathcal{L}_{b2\mathbf{k}_c}^{(0)} \mathcal{J}_{N2\mathbf{k}_c} \underline{F}^{(11)}(\underline{u}_c, \underline{u}_c) \quad (4.62)$$

$$\underline{B}_0(z, t) := 2 \underline{B}_a^{(1\bar{1})}(\underline{u}_c, \underline{u}_c^*) + \underline{B}_b^{(1\bar{1})}(\underline{u}_c, \underline{\psi}_c^*) + c.c. + 2 \mathcal{L}_{b0}^{(0)} \mathcal{J}_{N0} \underline{F}^{(1\bar{1})}(\underline{u}_c, \underline{u}_c^*) \quad , \quad (4.63)$$

erhält man also in zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} \partial_t \underline{m}^{(2)} &= \left(\tilde{\mathcal{L}}^{(0)} \underline{m}^{(2)} \right)^{[0]} + (\nabla_k \omega_c \cdot \nabla_1) A_1 \underline{u}_c e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + c.c. \\ &\quad + \underline{B}_{2\mathbf{k}_c} A_1^2 e^{2i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + c.c. + \underline{B}_0 |A_1|^2 - \partial_{t_1} A_1 \underline{u}_c e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} - c.c. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Zur Vermeidung von Säkulartermen muss die Bedingung (4.39) erfüllt werden. Da die Nichtlinearität in dieser Ordnung nur nichtresonante Beiträge liefert, erhält man die Bedingung¹⁴

$$\int_0^T (\partial_{t_1} - \nabla_k \omega_c \cdot \nabla_1) A_1 dt = 0 \quad . \quad (4.65)$$

¹³Diese Bedingung ist keineswegs notwendig, vereinfacht die Rechnung aber wesentlich.

¹⁴Wegen der Periodizität der Inhomogenität genügt es immer, über eine Periode zu integrieren.

Wird weiterhin berücksichtigt, dass der Integrand nicht von der Zeit abhängt, ergibt sich als Säkularbedingung

$$(\partial_{t_1} - \mathbf{v}_g \cdot \nabla_1) A_1 = 0 \quad (4.66)$$

mit der Gruppengeschwindigkeit

$$\mathbf{v}_g := \nabla_k \omega_c \quad . \quad (4.67)$$

Die Integration von (4.53) liefert

$$\underline{m}^{(2)} = A_2(\mathbf{r}_n, t_n) \underline{u}_c e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + \underline{\Gamma}_{2\mathbf{k}_c} A_1^2 e^{2i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + \underline{\Gamma}_0 |A_1|^2 + c.c. \quad , \quad (4.68)$$

wobei die Abkürzungen

$$\underline{\Gamma}_{2\mathbf{k}_c}(z, t) = \int_0^\infty \mathcal{U}_{2\mathbf{k}_c}(t, t - t') \underline{B}_{2\mathbf{k}_c}(z, t - t') dt' \quad (4.69)$$

$$\underline{\Gamma}_0(z, t) = \int_0^\infty \mathcal{U}_0(t, t - t') \underline{B}_0(z, t - t') dt' \quad (4.70)$$

verwendet wurden.¹⁵ Setzt man $\underline{m}^{(2)}$ aus (4.68) in (4.52) ein, ergibt sich schließlich für die verallgemeinerte Potentialgleichung in zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} \underline{\Phi}^{(2)} &= A_2 \mathcal{J}_{Lc} \underline{u}_c e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + c.c. + (-i)(\nabla_k \cdot \nabla_1) \mathcal{J}_{Lc} \underline{u}_c A_1 e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + c.c. \\ &\quad + \underline{\psi}_0 |A_1|^2 + \underline{\psi}_{2\mathbf{k}_c} A_1^2 e^{2i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + c.c. \end{aligned} \quad (4.74)$$

mit den Abkürzungen

$$\underline{\psi}_0 := \mathcal{J}_{N0} \underline{F}^{(1\bar{1})}(\underline{u}_c, \underline{u}_c^*) + \mathcal{J}_{L0} \underline{\Gamma}_0 \quad (4.75)$$

$$\underline{\psi}_{2\mathbf{k}_c} := \mathcal{J}_{N2\mathbf{k}_c} \underline{F}^{(11)}(\underline{u}_c, \underline{u}_c) + \mathcal{J}_{L2\mathbf{k}_c} \underline{\Gamma}_{2\mathbf{k}_c} \quad . \quad (4.76)$$

An dieser Stelle wird vorausgesetzt, dass die Integraloperatoren für $\mathbf{k} \rightarrow 0$ regulär sind. Wie wir später sehen werden, sind Singularitäten der Integraloperatoren für nichtlokale Beiträge verantwortlich.

¹⁵Ist das System nicht explizit zeitabhängig, vereinfachen sich die Koeffizienten zu

$$\underline{\Gamma}_{2\mathbf{k}_c}(z) = -\frac{1}{\tilde{\mathcal{L}}_{2\mathbf{k}_c} - 2i\omega_c \underline{1}} \underline{B}_{2\mathbf{k}_c}(z) \quad (4.71)$$

$$\underline{\Gamma}_0(z) = -\frac{1}{\tilde{\mathcal{L}}_0^{(0)}} \underline{B}_0(z) \quad (4.72)$$

mit den formal invertierten Operatoren

$$\frac{1}{\tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{k}}^{(0)} - i\omega \underline{1}} = \sum_{\mu\nu} \frac{1}{\lambda_{\mathbf{k}}^{(\mu\nu)} - i\omega} \frac{|u_{\mathbf{k}}^{(\mu\nu)}(z)\rangle \langle v_{\mathbf{k}}^{(\mu\nu)}(z)|}{\left(v_{\mathbf{k}}^{(\mu\nu)}(z) | u_{\mathbf{k}}^{(\mu\nu)}(z)\right)} \quad . \quad (4.73)$$

Ordnung ε^3

In dritter Ordnung lautet die zusätzliche Gleichung (4.9)

$$\begin{aligned} \ell_a \underline{\Phi}^{(3)} = & \left(\ell_b \underline{m}^{(3)} \right)^{[0]} + \left(\ell_b \underline{m}^{(2)} \right)^{[1]} + \left(\ell_b \underline{m}^{(1)} \right)^{[2]} - \left(\ell_a \underline{\Phi}^{(2)} \right)^{[1]} - \left(\ell_a \underline{\Phi}^{(1)} \right)^{[2]} \\ & + \left(\underline{n}_2[\underline{m}] \right)^{(3)} \left(\underline{n}_3[\underline{m}] \right)^{(3)} . \end{aligned} \quad (4.77)$$

Da sich in dieser Ordnung bereits die Amplitudengleichung ergeben wird, genügt es, die resonanten Beiträge der Inhomogenität aufzuführen, die für die Säkularbedingung wichtig sind. Die linearen Anteile mit Differentialoperatoren erster Ordnung können analog zur Ordnung ε^2 unter Berücksichtigung von (B.2) ermittelt werden; die Wirkung der Differentialoperatoren in zweiter Ordnung ist ebenfalls in Anhang B aufgeführt und liefert (B.4). Damit ergibt sich also für die linearen Beiträge der nichtlokalen Kopplung

$$\left(\ell_b \underline{m}^{(2)} \right)^{[1]} = (-i)(\nabla_k \cdot \nabla_1) \ell_{bc} \underline{u}_c A_2 e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + c.c. \quad (4.78)$$

$$\begin{aligned} \left(\ell_b \underline{m}^{(1)} \right)^{[2]} = & (-i)(\nabla_k \cdot \nabla_2) \ell_{bc} \underline{u}_c A_1 e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + c.c. \\ & + \left(-\frac{1}{2}\right)(\nabla_k \cdot \nabla_1)^2 \ell_{bc} \underline{u}_c A_1 e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + c.c. \end{aligned} \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned} \left(\ell_a \underline{\Phi}^{(2)} \right)^{[1]} = & (-i)(\nabla_k \cdot \nabla_1) \ell_{ac} \mathcal{J}_{Lc} \underline{u}_c A_2 e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + c.c. \\ & + (-i)(\nabla_k \cdot \nabla_1) \ell_{ac} (\nabla_k \cdot \nabla_1) \mathcal{J}_{Lc} \underline{u}_c A_2 e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + c.c. \end{aligned} \quad (4.80)$$

$$\begin{aligned} \left(\ell_a \underline{\Phi}^{(1)} \right)^{[2]} = & (-i)(\nabla_k \cdot \nabla_1) \ell_{ac} \mathcal{J}_{Lc} \underline{u}_c A_1 e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + c.c. \\ & + \left(-\frac{1}{2}\right)(\nabla_k \cdot \nabla_1)^2 \ell_{ac} \mathcal{J}_{Lc} \underline{u}_c A_1 e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + c.c. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Im nichtlinearen Anteil müssen alle möglichen Kombinationen der niedrigeren Ordnungen berücksichtigt werden, die zu resonanten Termen führen¹⁶. Unter Ausnutzung der Symmetrie der Koeffizienten lauten diese

$$\left(\underline{n}_2[\underline{m}] \right)^{(2)} = \left(2\underline{F}^{(01)}(\underline{\Gamma}_0, \underline{u}_c) + 2\underline{F}^{(2\bar{1})}(\underline{\Gamma}_{2\mathbf{k}_c}, \underline{u}_c^*) \right) |A_1|^2 A_1 e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + c.c. \quad (4.82)$$

$$\left(\underline{n}_3[\underline{m}] \right)^{(2)} = 3\underline{G}^{(11\bar{1})}(\underline{u}_c, \underline{u}_c, \underline{u}_c^*) |A_1|^2 A_1 e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + c.c. \quad (4.83)$$

¹⁶Terme aus $\underline{n}_2[\underline{m}^{(1)}], \underline{m}^{(1)}$ mit langsamen Ortsableitungen sind beispielsweise nicht resonant.

Fasst man alle resonanten Beiträge zusammen, wird aus (4.77)

$$\begin{aligned}
\ell_a \underline{\Phi}^{(3)} = & \ell_b \underline{m}^{(3)} + (-i)(\nabla_k \cdot \nabla_1)(\ell_{bc} \underline{u}_c - \ell_{ac} \mathcal{J}_{Lc} \underline{u}_c) A_2 e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + c.c. \\
& + (-i)(\nabla_k \cdot \nabla_2)(\ell_{bc} \underline{u}_c - \ell_{ac} \mathcal{J}_{Lc} \underline{u}_c) A_1 e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + c.c. \\
& + (-\frac{1}{2})(\nabla_k \cdot \nabla_1)^2 (\ell_{bc} \underline{u}_c - \ell_{ac} \mathcal{J}_{Lc} \underline{u}_c) A_1 e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + c.c. \\
& - (\nabla_k \cdot \nabla_1) \ell_{ac} (\nabla_k \cdot \nabla_1) A_1 \mathcal{J}_{Lc} \underline{u}_c e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} - c.c. \\
& + \left(2 \underline{F}^{(01)}(\underline{\Gamma}_0, \underline{u}_c) + 2 \underline{F}^{(2\bar{1})}(\underline{\Gamma}_{2\mathbf{k}_c}, \underline{u}_c^*) \right. \\
& \left. + 3 \underline{G}^{(11\bar{1})}(\underline{u}_c, \underline{u}_c, \underline{u}_c^*) \right) |A_1|^2 A_1 e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + c.c.
\end{aligned} \tag{4.84}$$

Die inhomogenen Anteile der ersten und zweiten Zeile liefern analog zur Ordnung ε^2 Terme der Form (C.10). Für die dritte und vierte Zeile werden die Ableitungsrelationen der nichtlokalen Kopplung benötigt, die sich aus den zweiten Ableitungen ergeben; wie in Anhang C gezeigt wird, erhält man damit die Lösung (C.12). Damit liefert die Integration von (4.84)

$$\begin{aligned}
\underline{\Phi}^{(3)} = & \mathcal{J}_L \underline{m}^{(3)} + (-i)(\nabla_k \cdot \nabla_1) \mathcal{J}_{Lc} \underline{u}_c A_2 e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + c.c. \\
& + (-i)(\nabla_k \cdot \nabla_2) \mathcal{J}_{Lc} \underline{u}_c A_1 e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + c.c. \\
& - \frac{1}{2}(\nabla_k \cdot \nabla_1)^2 \mathcal{J}_{Lc} \underline{u}_c A_1 e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} - c.c. \\
& + 2 \mathcal{J}_{Nc} \left(\underline{F}^{(01)}(\underline{\Gamma}_0, \underline{u}_c) + \underline{F}^{(2\bar{1})}(\underline{\Gamma}_{2\mathbf{k}_c}, \underline{u}_c^*) \right) |A_1|^2 A_1 e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + c.c. \\
& + 3 \mathcal{J}_{Nc} \underline{G}^{(11\bar{1})}(\underline{u}_c, \underline{u}_c, \underline{u}_c^*) |A_1|^2 A_1 e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + c.c.
\end{aligned} \tag{4.85}$$

Die dynamische Gleichung (4.1) lautet in der dritten Ordnung

$$\begin{aligned}
\partial_t \underline{m}^{(3)} + \partial_{t_1} \underline{m}^{(2)} + \partial_{t_2} \underline{m}^{(1)} = & \left(\mathcal{L}_a^{(0)} \underline{m}^{(3)} \right)^{[0]} + \left(\mathcal{L}_b^{(0)} \underline{\Phi}^{(3)} \right)^{[0]} + \left(\mathcal{L}_a^{(0)} \underline{m}^{(2)} \right)^{[1]} + \left(\mathcal{L}_b^{(0)} \underline{\Phi}^{(2)} \right)^{[1]} \\
& + \left(\mathcal{L}_a^{(0)} \underline{m}^{(1)} \right)^{[2]} + \left(\mathcal{L}_b^{(0)} \underline{\Phi}^{(1)} \right)^{[2]} + \left(\mathcal{N}_{2a}[\underline{m}, \underline{m}] \right)^{(3)} + \left(\mathcal{N}_{2b}[\underline{m}, \underline{\Phi}] \right)^{(3)} \\
& + \left(\mathcal{N}_{3a}[\underline{m}, \underline{m}, \underline{m}] \right)^{(3)} + \left(\mathcal{N}_{3b}[\underline{m}, \underline{m}, \underline{\Phi}] \right)^{(3)} + \left(\mathcal{L}_a^{(2)} \underline{m}^{(1)} \right)^{[0]} + \left(\mathcal{L}_b^{(2)} \underline{\Phi}^{(1)} \right)^{[0]}.
\end{aligned} \tag{4.86}$$

Die resonanten Beiträge der linken Seite ergeben

$$\partial_{t_1} \underline{m}^{(2)} = \underline{u}_c \partial_{t_1} A_2 e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + c.c. \tag{4.87}$$

$$\partial_{t_2} \underline{m}^{(1)} = \underline{u}_c \partial_{t_2} A_1 e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + c.c. \tag{4.88}$$

Für die linearen Operatoren der nullten Ordnung erhält man die resonanten Beiträge

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{L}_b^{(0)}\underline{\Phi}^{(3)}\right)^{[0]} &= \mathcal{L}_b^{(0)}\mathcal{J}_L\underline{m}^{(3)} + (-i)\mathcal{L}_{bc}^{(0)}(\nabla_k\cdot\nabla_1)\mathcal{J}_{Lc}\underline{u}_c A_2 e^{i(\mathbf{k}_c\mathbf{r}+\omega_c t)} + c.c. \\
&+ (-i)\mathcal{L}_{bc}^{(0)}(\nabla_k\cdot\nabla_2)\mathcal{J}_{Lc}\underline{u}_c A_1 e^{i(\mathbf{k}_c\mathbf{r}+\omega_c t)} + c.c. \\
&- \frac{1}{2}\mathcal{L}_{bc}^{(0)}(\nabla_k\cdot\nabla_1)^2\mathcal{J}_{Lc}\underline{u}_c A_1 e^{i(\mathbf{k}_c\mathbf{r}+\omega_c t)} - c.c. \\
&+ 2\mathcal{L}_{bc}^{(0)}\mathcal{J}_{Nc}\left(\underline{F}^{(01)}(\underline{\Gamma}_0, \underline{u}_c) + \underline{F}^{(2\bar{1})}(\underline{\Gamma}_{2k_c}, \underline{u}_c^*)\right)|A_1|^2 A_1 e^{i(\mathbf{k}_c\mathbf{r}+\omega_c t)} + c.c. \\
&+ 3\mathcal{L}_{bc}^{(0)}\mathcal{J}_{Nc}\underline{G}^{(11\bar{1})}(\underline{u}_c, \underline{u}_c, \underline{u}_c^*)|A_1|^2 A_1 e^{i(\mathbf{k}_c\mathbf{r}+\omega_c t)} + c.c.
\end{aligned} \tag{4.89}$$

$$\left(\mathcal{L}_a^{(0)}\underline{m}^{(2)}\right)^{[1]} = -i(\nabla_k\cdot\nabla_1)\mathcal{L}_{ac}^{(0)}\underline{u}_c A_2 e^{i(\mathbf{k}_c\mathbf{r}+\omega_c t)} + c.c. \tag{4.90}$$

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{L}_b^{(0)}\underline{\Phi}^{(2)}\right)^{[1]} &= (-i)(\nabla_k\cdot\nabla_1)\mathcal{L}_{bc}^{(0)}A_2\mathcal{J}_{Lc}\underline{u}_c e^{i(\mathbf{k}_c\mathbf{r}+\omega_c t)} + c.c. \\
&- (\nabla_k\cdot\nabla_1)\mathcal{L}_{bc}^{(0)}(\nabla_k\cdot\nabla_1)A_1\mathcal{J}_{lc}\underline{u}_c e^{i(\mathbf{k}_c\mathbf{r}+\omega_c t)} - c.c.
\end{aligned} \tag{4.91}$$

$$\left(\mathcal{L}_a^{(0)}\underline{m}^{(1)}\right)^{[2]} = \left((-i)(\nabla_k\cdot\nabla_2) - \frac{1}{2}(\nabla_k\cdot\nabla_1)^2\right)\mathcal{L}_{ac}^{(0)}\underline{u}_c A_1 e^{i(\mathbf{k}_c\mathbf{r}+\omega_c t)} + c.c. \tag{4.92}$$

$$\left(\mathcal{L}_b^{(0)}\underline{\Phi}^{(1)}\right)^{[2]} = \left((-i)(\nabla_k\cdot\nabla_2) - \frac{1}{2}(\nabla_k\cdot\nabla_1)^2\right)\mathcal{L}_{bc}^{(0)}\mathcal{J}_{lc}\underline{u}_c A_1 e^{i(\mathbf{k}_c\mathbf{r}+\omega_c t)} + c.c. \tag{4.93}$$

Dabei erhält man (4.89) durch Einsetzen von Φ_3 (4.85), und (4.90) und (4.91) ergeben sich analog zu den Beiträgen in der Ordnung ε^2 mit (B.2). In (4.92) und (4.93) müssen die Differentialoperatoren entsprechend in zweiter Ordnung angewendet werden (vgl. Anhang B); die Beiträge ergeben sich mit (B.4).

Wie in der Ordnung ε^2 lassen sich auch hier die ersten Ableitungen gemäß

$$(-i)(\nabla_k\cdot\nabla_1)\tilde{\mathcal{L}}_c^{(0)}A_2\underline{u}_c \quad \text{bzw.} \quad (-i)(\nabla_k\cdot\nabla_2)\tilde{\mathcal{L}}_c^{(0)}A_1\underline{u}_c \tag{4.94}$$

zusammenfassen. Alle Beiträge mit zweiten Ortsableitungen liefern zusammen gerade

$$-\frac{1}{2}(\nabla_k\cdot\nabla_1)^2\tilde{\mathcal{L}}_c^{(0)}\underline{u}_c A_1 \quad . \tag{4.95}$$

Wegen der \mathbf{k} -Unabhängigkeit der Eigenvektoren gilt für die ersten Ableitungen die Beziehung (4.59) und für die zweiten

$$(\nabla_k\cdot\nabla_1)^2\tilde{\mathcal{L}}_c^{(0)}\underline{u}_c A_1 = (\nabla_k\cdot\nabla_1)^2\lambda_c\underline{u}_c A_1 \quad . \tag{4.96}$$

Die Nichtlinearitäten enthalten mit den Lösungen der niedrigeren Ordnungen die

resonanten Beiträge

$$\left(\underline{\mathcal{N}}_{2a}[\underline{m}, \underline{m}]\right)^{(3)} = \left(2\underline{B}_a^{(2\bar{1})}(\underline{\Gamma}_{2\mathbf{k}_c}, \underline{u}_c^*) + 2\underline{B}_a^{(01)}(\underline{\Gamma}_0, \underline{u}_c)\right) |A_1|^2 A_1 e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + c.c. \quad (4.97)$$

$$\begin{aligned} \left(\underline{\mathcal{N}}_{2b}[\underline{m}, \underline{\Phi}]\right)^{(3)} &= \left(\underline{B}_b^{(2\bar{1})}(\underline{\Gamma}_{2\mathbf{k}_c}, \underline{\psi}_c^*) + \underline{B}_b^{(01)}(\underline{\Gamma}_0, \underline{\psi}_c) + \underline{B}_b^{(\bar{1}2)}(\underline{u}_c^*, \underline{\psi}_{2k_c}) \right. \\ &\quad \left. + \underline{B}_b^{(10)}(\underline{u}_c, \underline{\psi}_0)\right) |A_1|^2 A_1 e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + c.c. \end{aligned} \quad (4.98)$$

$$\left(\underline{\mathcal{N}}_{3a}[\underline{m}, \underline{m}, \underline{m}]\right)^{(3)} = 3\underline{D}_a^{(11\bar{1})}(\underline{u}_c, \underline{u}_c, \underline{u}_c^*) |A_1|^2 A_1 e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + c.c. \quad (4.99)$$

$$\left(\underline{\mathcal{N}}_{3b}[\underline{m}, \underline{m}, \underline{\Phi}]\right)^{(3)} = \left(\underline{D}_b^{(11\bar{1})}(\underline{u}_c, \underline{u}_c, \underline{\psi}_c^*) + 2\underline{D}_b^{(1\bar{1}1)}(\underline{u}_c, \underline{u}_c^*, \underline{\psi}_c)\right) |A_1|^2 A_1 e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + c.c. \quad (4.100)$$

Berücksichtigt man noch die nichtlinearen Beiträge aus (4.89), lassen sich die quadratischen und kubischen Terme durch die Abkürzungen

$$\begin{aligned} \underline{B}_c(z, t) &:= 2\underline{B}_a^{(2\bar{1})}(\underline{\Gamma}_{2\mathbf{k}_c}, \underline{u}_c^*) + 2\underline{B}_a^{(01)}(\underline{\Gamma}_0, \underline{u}_c) + \underline{B}_b^{(2\bar{1})}(\underline{\Gamma}_{2\mathbf{k}_c}, \underline{\psi}_c^*) + \underline{B}_b^{(01)}(\underline{\Gamma}_0, \underline{\psi}_c) \\ &\quad + \underline{B}_b^{(\bar{1}2)}(\underline{u}_c^*, \underline{\psi}_{2k_c}) + \underline{B}_b^{(10)}(\underline{u}_c, \underline{\psi}_0) \\ &\quad + 2\underline{\mathcal{L}}_{bc}^{(0)} \mathcal{J}_{Nc} \left(\underline{F}^{(01)}(\underline{\Gamma}_0, \underline{u}_c) + \underline{F}^{(2\bar{1})}(\underline{\Gamma}_{2k_c}, \underline{u}_c^*) \right) \end{aligned} \quad (4.101)$$

$$\begin{aligned} \underline{D}_c(z, t) &:= 3\underline{D}_a^{(11\bar{1})}(\underline{u}_c, \underline{u}_c, \underline{u}_c^*) + \underline{D}_b^{(11\bar{1})}(\underline{u}_c, \underline{u}_c, \underline{\psi}_c^*) + 2\underline{D}_b^{(1\bar{1}1)}(\underline{u}_c, \underline{u}_c^*, \underline{\psi}_c) \\ &\quad + 3\underline{\mathcal{L}}_{bc}^{(0)} \mathcal{J}_{Nc} \underline{G}^{(11\bar{1})}(\underline{u}_c, \underline{u}_c, \underline{u}_c^*) \end{aligned} \quad (4.102)$$

zusammenfassen. Schließlich treten noch Beiträge der linearen Operatoren der zweiten Ordnung auf:

$$\left(\underline{\mathcal{L}}_a^{(2)} \underline{m}^{(1)}\right)^{[0]} = \underline{\mathcal{L}}_{ac}^{(2)} \underline{u}_c A_1 e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + c.c. \quad (4.103)$$

$$\left(\underline{\mathcal{L}}_b^{(2)} \underline{\Phi}^{(1)}\right)^{[0]} = \underline{\mathcal{L}}_{bc}^{(2)} \mathcal{J}_{Lc} \underline{u}_c A_1 e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + c.c. \quad (4.104)$$

Diese können mit der Definition (4.22) zu

$$\tilde{\mathcal{L}}_c^{(2)} \underline{u}_c A_1 e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + c.c. \quad (4.105)$$

zusammengefasst werden. Mit all diesen Beiträgen lautet die Differentialgleichung (4.86)

$$\begin{aligned} \partial_t \underline{m}^{(3)} &= \left(\tilde{\mathcal{L}}^{(0)} \underline{m}_3\right)^{[0]} + \left((\mathbf{v}_g \cdot \nabla_1) A_2 + (\mathbf{v}_g \cdot \nabla_2) A_1 - \frac{1}{2} (\nabla_k \cdot \nabla_1)^2 \tilde{\mathcal{L}}_c^{(0)} \underline{u}_c A_1 \right. \\ &\quad \left. + \tilde{\mathcal{L}}_c^{(2)} \underline{u}_c A_1 + (\underline{B}_c + \underline{D}_c) |A_1|^2 A_1\right) e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + c.c. \\ &\quad - (\partial_{t_1} A_2 + \partial_{t_2} A_1) \underline{u}_c e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} + c.c. + \text{nr. T.} \end{aligned} \quad (4.106)$$

Zur Vermeidung von zeitlich anwachsenden Termen erhält man die Säkularbedingung

$$\int_0^T (\underline{v}_c | \underline{u}_c) (\partial_{t_1} A_2 + \partial_{t_2} A_1) dt = \int_0^T \left\{ \underline{v}_g \cdot (\nabla_1 A_2 + \nabla_2 A_1) - \frac{1}{2} (\nabla_k \cdot \nabla_1) \lambda_c (\underline{v}_c | \underline{u}_c) A_1 + \left(\underline{v}_c | \tilde{\mathcal{L}}_c^{(2)} \underline{u}_c \right) + (\underline{v}_c | \underline{B}_c + \underline{D}_c) |A_1|^2 A_1 \right\} dt \quad (4.107)$$

Nach der Differentiation mit $(\partial_{t_1} - \mathbf{v}_g \cdot \nabla_1)$ und unter Einbeziehung der Säkularbedingung in Ordnung ε^2 (4.65) fallen alle Beiträge von A_1 heraus, und man erhält für A_2 die Gleichung

$$(\partial_{t_1} - \mathbf{v}_g \cdot \nabla_1)^2 A_2 = 0 \quad (4.108)$$

deren allgemeine Lösung die folgende Form hat:

$$A_2 = a_2(\mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_g t_1) + (\mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_g t_1) b_2(\mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_g t_1) \quad (4.109)$$

Damit die Lösung für A_2 keine Säkularterme enthält, muss $b_2 \equiv 0$ sein, und somit muss auch A_2 die Säkularbedingung

$$(\partial_{t_1} - \mathbf{v}_g \cdot \nabla_1) A_2 = 0 \quad (4.110)$$

erfüllen. Mit diesen Voraussetzungen erhält man schließlich als Amplitudengleichung eine komplexe Ginzburg–Landau–Gleichung

$$(\partial_{t_2} - \mathbf{v}_g \cdot \nabla_2) A_1 = \mu A_1 + \langle \nabla_1 | D \nabla_1 \rangle A_1 + r |A_1|^2 A_1 \quad (4.111)$$

mit den Koeffizienten \mathbf{v}_g aus (4.67) und

$$\mu = \frac{\int_0^T (\underline{v}_c | \tilde{\mathcal{L}}_c^{(2)} \underline{u}_c) dt}{\int_0^T (\underline{v}_c | \underline{u}_c) dt} \quad (4.112)$$

$$\underline{\underline{D}} = -\frac{1}{2} |\nabla_k \rangle \langle \nabla_k | \lambda_c \quad (4.113)$$

$$r = \frac{\int_0^T (\underline{v}_c | \underline{B}_c + \underline{D}_c) dt}{\int_0^T (\underline{v}_c | \underline{u}_c) dt} \quad (4.114)$$

Der lineare Koeffizient μ gibt also den Abstand zur Schwelle an, während die Diffusionsmatrix $\underline{\underline{D}}$ durch die Krümmung des Spektrums des kritischen Eigenwerts gegeben ist. Diese beiden Koeffizienten lassen sich also aus dem linearen System bestimmen. Der Koeffizient r dagegen enthält alle resonanten Beiträge aus der nichtlinearen Entwicklung um die stationäre Lösung, die in \underline{B}_c (4.101) und \underline{D}_c (4.102) enthalten sind.

Zur Beschreibung der Dynamik schwach oberhalb der Schwelle ergibt sich also eine Amplitudengleichung, die auch für Systeme ohne die zusätzliche Gleichung (4.9) gilt. Obwohl die komplexe Ginzburg–Landau–Gleichung wohlbekannt ist und vielfältige Beiträge beispielsweise zu ihrem Lösungsverhalten und sekundären Instabilitäten erbracht wurden, ist sie immer noch Gegenstand aktueller Forschung. Eine Übersicht über die Arbeiten zur Ginzburg–Landau–Gleichung findet sich zum Beispiel in [ArKr].

Die Modifikationen, die sich hier durch das verallgemeinerte Potential ergeben, sind wichtig zur Bestimmung der Koeffizienten: Entscheidend sind bei der Integration in den einzelnen Ordnungen die Identifikationen mit den Ableitungsrelationen, die schließlich zur Diffusionsmatrix \underline{D} (4.113) führen. In den Ableitungen des kritischen Eigenwerts ist der Anteil der verallgemeinerten Potentialgleichung automatisch enthalten, während im linearen Koeffizienten μ (4.112) ein Beitrag in $\tilde{\mathcal{L}}_c^{(2)}$ (4.22) auftritt. Im nichtlinearen Koeffizienten r (4.114) ist das verallgemeinerte Potential in vielfältiger Weise enthalten: Zum einen kommt es in den Beiträgen (4.98) und (4.100) mit dem Index b vor, zum andern treten in (4.89) auch die nichtlinearen Beiträge der zusätzlichen Gleichung auf. Hinzu kommen noch die resonanten Terme in dritter Ordnung, die die nichtresonanten Beiträge $\underline{\Gamma}_{2\mathbf{k}_c}$ (4.69) und $\underline{\Gamma}_0$ (4.70) aus der zweiten Ordnung enthalten, in der das Potential analog auftritt.

Die Amplitudengleichung gilt auch für die Spezialfälle der Soft–Mode– und Hard–Mode–Instabilität ($\omega_c = 0$ bzw. $\mathbf{k}_c = 0$) und natürlich auch für Systeme ohne explizite Zeitabhängigkeit; für diese fallen die Integrale über eine Periode in den Definitionen für die Koeffizienten weg. Der zweite Term auf der linken Seite kann durch einen Übergang in das mitbewegte Bezugssystem immer wegtransformiert werden.

Die Beiträge der verallgemeinerten Potentialgleichung machen sich also bei der expliziten Berechnung der Koeffizienten bemerkbar, aber die resultierende Gleichung hat dieselbe Struktur wie die für Systeme ohne diese Kopplung, wenn man voraussetzt, dass alle Beiträge der Integraloperatoren regulär sind. Die Ableitung ist nicht mehr gültig, wenn für $\mathbf{k} = 0$ Singularitäten auftreten. Um dies zu erkennen, müssen jedoch zunächst die Koeffizienten für das magnetische System konkret ausgewertet werden.

Kapitel 5

Amplitudengleichung für ferromagnetischen Film

Mit der allgemeinen Ableitung der Amplitudengleichung können in diesem Kapitel die Koeffizienten berechnet werden, die sich für den ferromagnetischen Film schwach oberhalb der Instabilitätsschwelle der homogenen stationären Lösung ergeben. Dabei gehen wir insbesondere auf die Behandlung der magnetostatischen Potentialgleichung ein. Während sich die linearen Koeffizienten mit den Ergebnissen der linearen Stabilitätsanalyse aus Kapitel 3 ergeben, müssen für den nichtlinearen Koeffizienten auch alle benötigten Beiträge der zweiten und dritten Ordnung bestimmt werden, die in r (4.114) enthalten sind. Die Verläufe der linearen und nichtlinearen Koeffizienten werden sowohl für das XY -Modell als auch für den genäherten isotropen Austausch angegeben.

5.1 Instabilität

Wie wir in Kapitel 3.5 festgestellt haben, tritt die niedrigste Instabilität der homogenen Lösung für den Fall $a > 0$ bei $\mathbf{k}_c = k_c \mathbf{e}_y$ und $\omega_c = \frac{\Omega}{2}$ auf, wobei das kritische treibende Feld durch (3.61) für das XY -Modell bzw. durch den genäherten Wert (3.64) für isotropen Austausch bestimmt ist. Wegen der Inversionssymmetrie ist auch $\omega(-\mathbf{k}_c)$ ein kritischer Floquet-Exponent, es kann also auch eine gegenläufige Welle auftreten. Wir beschränken uns hier jedoch auf die Strukturen, die durch die Modulationen einer laufenden Welle entstehen; diese werden durch die in Kapitel 4 abgeleitete Amplitudengleichung beschrieben. Aufgrund der parametrischen Resonanz entspricht der Imaginärteil des kritischen Eigenwerts gerade der halben Frequenz des treibenden Feldes. Da die kritische Wellenzahl aber von Null verschie-

den ist, treten keine starken Resonanzen auf.¹ Die Eigenvektoren sind in niedrigster Ordnung nur für $\mathbf{k} = \mathbf{k}_c$ explizit zeitabhängig. Sie ergeben sich mit (A.23) und (A.32) aus der Floquetschen Störungstheorie.

Zur Berechnung der Instabilität wurde eine Störungstheorie für $\eta \ll 1$ durchgeführt. Die Multiple-Scale-Analyse zur Ableitung der Amplitudengleichung ist ebenfalls eine Störungstheorie für $\varepsilon \ll 1$. Zur Trennung dieser beiden Skalen nehmen wir an, dass

$$\varepsilon \ll \eta \ll 1 \quad (5.1)$$

gilt. Dann tritt die Instabilität in der niedrigsten Ordnung der nichtlinearen Analyse auf.

5.2 Bewegungsgleichungen für magnetischen Film

Erhaltungsgröße

Wegen der Betragserhaltung der Magnetisierung lässt sich die Komponente M_z immer durch M_x und M_y ausdrücken. Für die Entwicklung um die stationäre Lösung, die ja nur eine z -Komponente aufweist, verwendet man also, wie in Kapitel 3 schon angegeben wurde,

$$m_z = -\frac{1}{2}\underline{m}_\perp^2 + \mathcal{O}(4). \quad (5.2)$$

Die dynamische Gleichung hat mit dieser Ersetzung also nur zwei Komponenten, und m_z liefert nichtlineare Beiträge.

Dynamische Gleichung

In Kapitel 3 wurde die Landau–Lifshitz–Gleichung bereits bis zur dritten Ordnung um die stationäre Lösung entwickelt. Mit (3.5) und (3.6) lassen sich daher die konkreten Koeffizienten der linearen und nichtlinearen Operatoren direkt ablesen. Dabei haben die Differentialoperatoren ∇ und Δ für isotropen Austausch drei Komponenten, während für das XY-Modell dort noch ein Index (\perp) eingeführt werden muss. Man erkennt, dass nur die nichtlinearen Beiträge $\underline{\mathcal{N}}_{2b}$ und $\underline{\mathcal{N}}_{3a}$ auftreten.

¹Im Fall der starken Resonanzen bei verschwindender Wellenzahl ergeben sich andere Amplitudengleichungen. Eine allgemeine Ableitung findet man in [JustW], die Anwendung auf ein eindimensionales ferromagnetisches System in [JustC].

Potentialgleichung

Für die Potentialgleichung lautet der lineare Operator der homogenen Gleichung

$$\ell_a = \Delta. \quad (5.3)$$

Für die Inhomogenität stellen wir die Operatoren in der in (4.11) bzw. (4.13) geforderten Form dar, so dass sie automatisch die Randbedingungen und die Beschränkung der Magnetisierung auf die Filmdicke enthalten:

$$\underline{\ell}_b = \Theta(\frac{d}{2} - |z|) 4\pi \nabla_{\perp} \quad (5.4)$$

$$n_2[\underline{m}, \underline{m}] = \Theta(\frac{d}{2} - |z|) 4\pi \partial_z m_z + 4\pi \left(\delta(z - \frac{d}{2}) - \delta(z + \frac{d}{2}) \right) m_z \quad (5.5)$$

Dabei führt m_z wegen (5.2) zu einer quadratischen Nichtlinearität. Diese Form der nichtlokalen Kopplung ohne zusätzliche Randbedingungen hatte bei der allgemeinen Ableitung den Vorteil, dass man die höheren Ordnungen direkt durch Identifikation mit den Ableitungsrelationen integrieren konnte und es nicht nötig war, in jeder Ordnung neue Randbedingungen durch den Beitrag des Außenraums zu berücksichtigen. In Kenntnis der allgemeinen Lösung kann man in (5.4) und (5.5) die Θ - und δ -Funktionen auch wieder weglassen und direkt die Integraloperatoren

$$\mathcal{J}_{L\mathbf{k}} \hat{=} \mathcal{J}_{\perp\mathbf{k}}, \quad \mathcal{J}_{N\mathbf{k}} \hat{=} \mathcal{J}_{z\mathbf{k}} \quad (5.6)$$

identifizieren².

z -Abhängigkeit

Die z -Abhängigkeit des Systems muss bei der Integration der Gleichung in jeder Ordnung beachtet werden. Der Zeitentwicklungsoperator enthält in der Spektraldarstellung (4.37) jeweils alle linearen Eigenmoden zum Wellenvektor \mathbf{k} .

• XY -Modell:

Die Eigenmoden in z -Richtung, die durch die Wellenzahl $q^{(\nu)}$ festgelegt werden, unterscheiden sich wegen der transzendenten Bestimmungsgleichungen (3.37) bzw. (3.38) für verschiedene Wellenvektoren \mathbf{k} . Da der Zeitentwicklungsoperator $\mathcal{U}_{\mathbf{k}}$ (4.37) alle Eigenmoden zum jeweiligen Wellenvektor \mathbf{k} enthält, können sich bei der Integration der inhomogenen Gleichung (4.35) also Summen über diese unendlich vielen Eigenmoden ergeben. Diese kann man dann zur expliziten Berechnung aber schnell abbrechen, da die Koeffizienten für größere ν sehr schnell klein werden.

²Für die Berechnung der Koeffizienten werden nur die Fouriertransformierten der Integraloperatoren benötigt.

- **Genäherte Moden für isotropen Austausch:**

Bei den isotropen Austauschmoden (3.45) besteht die Näherung gerade darin, dass man vom vollständigen Satz der Moden, die die Randbedingungen erfüllen, nur eine Mode berücksichtigt; diese Näherung muss man dann natürlich in jeder Ordnung beibehalten. Da die Moden insbesondere nicht von \mathbf{k} abhängen, treten aufgrund der Projektion keine Summen auf.

5.3 Bestimmung der Koeffizienten

Linearer Koeffizient:

Der lineare Koeffizient μ enthält den linearen Operator $\tilde{\mathcal{L}}_c^{(2)}$, der gerade durch den Abstand zur Schwelle definiert war (4.28). Da die Instabilität durch das treibende Feld h hervorgerufen wird, entspricht (4.112) gerade der Ableitung des kritischen Eigenwerts nach dem treibenden Feld:

$$\mu = \partial_h \lambda_c \quad . \quad (5.7)$$

Man erhält den Koeffizienten μ also durch Ableiten des kritischen Eigenwerts λ_{1+} (3.58) für das XY-Modell bzw. dem durch (3.62) modifizierten Ausdruck für die genäherten Moden nach dem treibenden Feld. μ ist also von der Ordnung η und rein reell; in der niedrigsten Ordnung hängt der Eigenwert natürlich nicht von h ab.

Gruppengeschwindigkeit:

Da k_x im Imaginärteil des kritischen Eigenwerts ω_c nur quadratisch auftritt, hat \underline{v}_g wegen $\mathbf{k}_c = k_c \mathbf{e}_y$ nur eine y -Komponente. v_{gy} ergibt sich also aus der Ableitung von (3.53) bzw. (3.63) nach k_y , wobei der kritische Wellenvektor eingesetzt werden muss.

Diffusionsmatrix:

Da die gemischten zweiten Ableitungen des kritischen Eigenwertes verschwinden, ist $\underline{\underline{D}}$ orthogonal. In der Amplitudengleichung treten also keine gemischten zweiten Ableitungen auf. Für die Diagonalelemente erhält man

$$\operatorname{Re} D_{x/y} = -\frac{1}{2} \partial_{k_{x/y}}^2 \lambda_{1+} \Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_c} \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{Im} D_{x/y} = -\frac{1}{2} \partial_{k_{x/y}}^2 \omega_{\mathbf{k}} \Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_c} \quad (5.8)$$

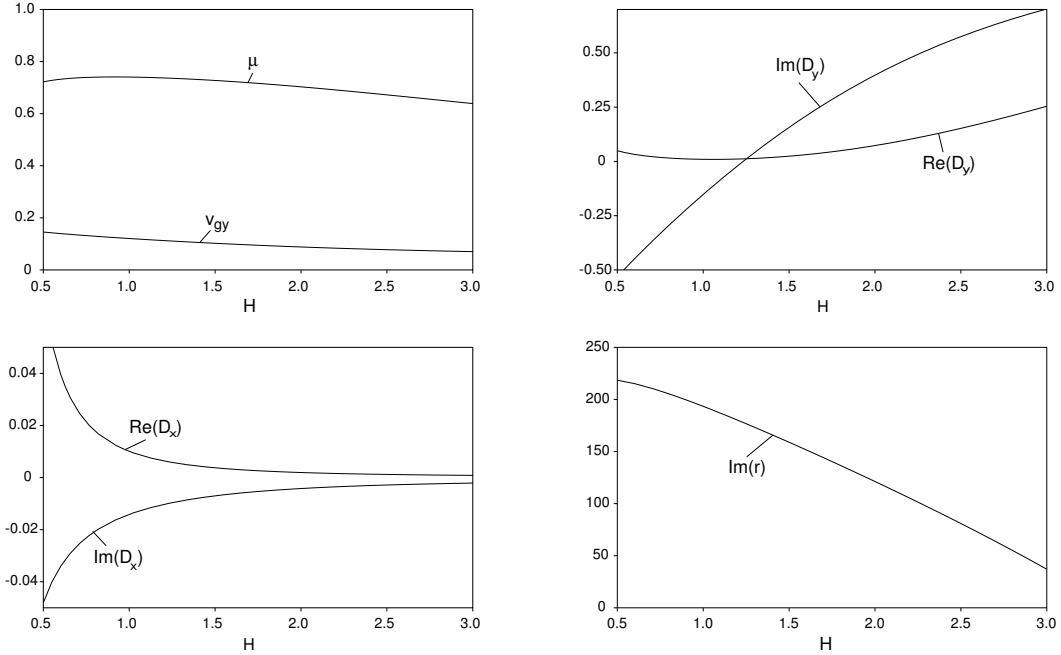


Abbildung 5.1: Koeffizienten der Amplitudengleichung (5.9) für das XY-Modell. Die Gruppengeschwindigkeit v_{gy} und die Imaginärteile der Diffusionskoeffizienten $\text{Im } D_x$ und $\text{Im } D_y$ sind von der Größenordnung 1, während die übrigen Koeffizienten von der Größenordnung η sind. Die Parameter sind identisch zur linearen Stabilitätsanalyse gewählt, zusätzlich gilt $b = 0.07$ und $\Gamma = 1$. Für $H \rightarrow 0$ divergieren die linearen Koeffizienten, da die homogene Lösung instabil wird. Dies lässt sich an den Diffusionskoeffizienten schon erkennen, während es für die anderen Koeffizienten erst für noch kleinere Werte von H ersichtlich wird.

Nichtlinearer Koeffizient:

Da die Eigenvektoren für $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_c$ außerhalb der Resonanz und somit nicht explizit zeitabhängig sind (vgl. (A.16)), kann hier die Integration gemäß (4.40) erfolgen; nur die Inhomogenität ist explizit zeitabhängig. Der Realteil λ_1 der Eigenwerte wird für die Integration benötigt, damit die Integrale konvergieren; hinterher kann er dann aber für die niedrigste Ordnung vernachlässigt werden.³ Konsequenterweise werden auch die Anteile der Dämpfung und des treibenden Feldes vernachlässigt. Daher ist r in niedrigster Ordnung rein imaginär.

Für die Bestimmung des Imaginärteils von r müssen also alle resonanten Beiträge aus \underline{B}_c (4.101) und \underline{D}_c (4.102) bestimmt werden, die sich für den ferromagnetischen Film in der Ordnung η^0 ergeben.

³Ansonsten muss man auch die erste Ordnung der Eigenvektoren berücksichtigen.

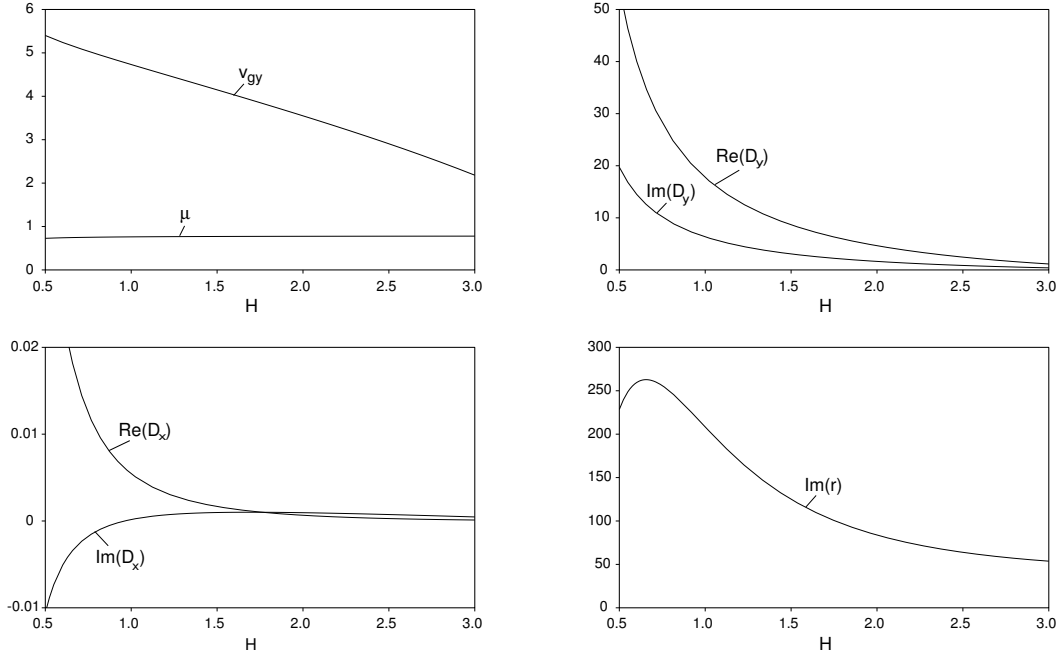


Abbildung 5.2: Koeffizienten der Amplitudengleichung (5.9) für das genäherte System mit isotropem Austausch. Es gelten die gleichen Bemerkungen wie zu Abbildung 5.1. Die Ergebnisse unterscheiden sich wesentlich stärker von denen des XY -Modells, als dies bei der linearen Stabilitätsanalyse der Fall war.

Damit erhält man für die Amplitudengleichung für den ferromagnetischen Film

$$(\partial_{t_2} - v_{gy}\partial_{y_2}) A_1 = \mu A_1 + (D_x\partial_{x_1}^2 + D_y\partial_{y_1}^2) A_1 + r|A_1|^2 A_1 \quad , \quad (5.9)$$

wobei die Koeffizientenverläufe für das System mit XY -Austauschwechselwirkung in Abbildung 5.1 und für die genäherten Moden bei isotropem Austausch in Abbildung 5.2 dargestellt sind. Sie wurden mit einem Programm für symbolische Mathematik bestimmt [Wolf].

5.4 Nichtlokaler Beitrag

Bei der Bestimmung der nichtlinearen resonanten Beiträge tritt in (4.101) der Beitrag $\underline{B}_b^{(10)}(\underline{u}_c, \underline{\psi}_0)$ auf, der wegen $\underline{\psi}_0$ (4.75) den Integraloperator \mathcal{J}_{l0} enthält. Dieser wird aber für den ferromagnetischen Film singulär. Um herauszufinden, welchen Einfluss diese Singularität auf die Dynamik des Films oberhalb der Schwelle hat, sollen im nächsten Kapitel die Beiträge des Potentials für Inhomogenitäten mit $\mathbf{k} = 0$ detailliert untersucht werden. Wie wir sehen werden, spielt dieser nichtlokale Beitrag in der Ordnung ε^3 keine Rolle, da er homogen in z ist und deshalb in $\underline{\mathcal{N}}_{2b}$ (3.6)

herausfällt. Die Amplitudengleichung (5.9) ist also bis zu dieser Ordnung korrekt. In vierter Ordnung Störungstheorie wird aber durch die langreichweitige Dipolarwechselwirkung ein zusätzlicher, nichtlokaler Term

$$A_1 \langle \nabla_1 | G \nabla_1 \rangle \int d\mathbf{r}'_1 \frac{|A_1(\mathbf{r}'_1)|^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1|} \quad (5.10)$$

hervorgerufen. Dieser prinzipiell neue Beitrag soll im nächsten Kapitel abgeleitet werden.

Kapitel 6

Nichtlokale Amplitudengleichungen

In diesem Kapitel sollen nichtlokale Beiträge der Amplitudengleichung für den ferromagnetischen Film abgeleitet werden. Der Ausgangspunkt ist dabei eine Instabilität mit $\mathbf{k}_c \neq 0$; für Hard-Mode-Instabilitäten treten andere nichtlokale Beiträge auf. Wir diskutieren zunächst den Einfluss der Singularität auf das Potential und bestimmen dann den nichtlokalen Beitrag, der sich dadurch in der Amplitudengleichung ergibt. Dieser tritt erst in der vierten Ordnung auf, da die dynamische Gleichung nur den Gradienten des Potentials enthält, spielt aber auf Grund seiner prinzipiell neuen Struktur für die Dynamik der Magnetisierung oberhalb der Schwelle trotzdem eine wichtige Rolle.

Anschaulich ist es einsichtig, dass die langreichweitige Dipolarwechselwirkung für $\mathbf{k} \rightarrow 0$ nichtlokale Beiträge zur Dynamik der Magnetisierung liefert: Wenn eine schnelle Trägerwelle fehlt, machen sich langsame räumliche Störungen auf großen Skalen bemerkbar. Die Analyse kann auf zwei verschiedene Weisen erfolgen:

Der erste Zugang besteht darin, direkt für den Integraloperator $\mathcal{J}_{\mathbf{k}}$ den Grenzübergang $\mathbf{k} \rightarrow 0$ zu untersuchen; die Lösung des Potentials ergibt sich dann über eine Fouriertransformation. Dieser Weg ist am kompaktesten, weicht aber etwas von dem vorher verwendeten Schema ab.

Zum anderen kann man das magnetostatische Potential in jeder Ordnung für Beiträge der Inhomogenität mit $\mathbf{k} = 0$ integrieren, denn die Ableitung der Greenschen Funktion aus Abschnitt 3.4.1 gilt für diesen Fall nicht. Dass hier neue Beiträge eine Rolle spielen, erkennt man formal an der Lösung der Potentialgleichung in jeder Ordnung: Da für $\mathbf{k} = 0$ nur die Ableitung des Potentials durch die Randbedingung festgelegt wird, enthält die Lösung eine additive Integrationskonstante $C^{(n)}$, die genau wie die Amplitude A von den langsamen räumlichen Skalen \mathbf{r}_n abhängen kann. Die Potentialgleichung produziert hier also einen zusätzlichen Beitrag, der eigene räumliche Strukturen aufweist, während die zeitliche Dynamik aber instantan der dynamischen Magnetisierung folgt. Die Bestimmungsgleichungen für die Integrati-

onskonstanten $C^{(n)}$ ergeben sich jeweils in höheren Ordnungen durch die Randbedingungen, denn bei Neumannschen Randbedingungen existiert immer eine Bedingung an die Inhomogenität. Musste für die dynamische Amplitude immer eine Bedingung zur Vermeidung von zeitlich anwachsenden Terme erfüllt sein, treten hier räumliche Bedingungsgleichungen auf.

Eine entscheidende Rolle spielt dabei das Potential außerhalb des Films: Da es auch in der z -Richtung unbeschränkt ist, sind zusätzlich langsame Skalen z_n notwendig.¹ Mit diesen neu eingeführten Skalen muss in jeder Ordnung zunächst das Potential im Außenraum bestimmt werden; ähnlich wie bei der Bestimmung der Greenschen Funktion für $\mathbf{k} \neq 0$ legt die Lösung im Außenraum dann die Randbedingung für den Innenraum fest.

Bei Lösungen des Potentials ohne Störungsentwicklung spielt eine additive Integrationskonstante keine Rolle, da die dynamische Gleichung nur das Dipolarfeld, also den Gradienten des Potentials enthält. Auf Grund der Störungsentwicklung sind die Integrationskonstanten $C^{(n)}(\mathbf{r}_n)$ aber zwingend notwendig, da die Randbedingungen bzw. die Bedingungen an die Inhomogenität sonst nicht erfüllt werden können.

Obwohl sich dieses durch die nichtlokale Dipolarwechselwirkung induzierte Phänomen durch den Einfluss des Außenraums wesentlich von nichtlokalen Mean-Drift-Effekten in der Hydrodynamik unterscheidet, die auf Grund der Inkompressibilität der Flüssigkeit auftreten, lässt sich an der Ableitung für das magnetische System auch die prinzipielle Struktur der Amplituden- und Mean-Drift-Gleichungen für hydrodynamische Systeme ablesen.

Da wir das Auftreten nichtlokaler Beiträge möglichst genau verstehen wollen, werden hier beide Wege parallel vorgestellt; beide bieten Vorteile für das Verständnis, und natürlich liefern sie dieselbe Lösung.

6.1 Integralformulierung

Da die Fouriertransformierte des Integraloperators $\mathcal{J}_{\perp\mathbf{k}}$ für $\mathbf{k} \rightarrow 0$ singulär wird, erscheint es lohnend, direkt die Grenzübergänge der Integraloperatoren für den ferromagnetischen Film zu betrachten. Dazu gehen wir von der allgemeinen Lösung der Potentialgleichung in der Ortsdarstellung

$$\Phi = \mathcal{J}_{\perp}\mathbf{m}_{\perp} + \mathcal{J}_z m_z \quad (6.1)$$

zu einer Darstellung über, die die Fouriertransformierten der Integraloperatoren enthält. Dann kann direkt der Grenzübergang $\mathbf{k} \rightarrow 0$ durchgeführt werden. Betrachtet

¹Für $\mathbf{k} \neq 0$ spielen diese Skalen keine Rolle, da durch die schnelle Trägerwelle eine Kompensation auf kurzen Skalen stattfindet; das Potential fällt exponentiell ab.

man eine Fouriermode der Magnetisierung bezüglich der schnellen Ortsskala

$$\mathbf{m}_\perp = \boldsymbol{\mu}_\perp(\mathbf{k})(z, \mathbf{r}_1, \dots) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad m_z = \mu_z(\mathbf{k})(z, \mathbf{r}_1, \dots) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (6.2)$$

muss man diese für die Berücksichtigung langsamer räumlicher Variationen auch bezüglich der langsamen Skalen \mathbf{r}_n fouriertransformieren, wobei hier die erste Ordnung ausreichend ist:

$$\mathbf{m}_\perp = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{q} \hat{\boldsymbol{\mu}}_\perp(\mathbf{k}+\mathbf{q})(z, \mathbf{r}_2, \dots) e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{q})\mathbf{r}} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{q} \hat{\boldsymbol{\mu}}_\perp(\mathbf{k})(z, \mathbf{r}_2, \dots) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \dots \quad (6.3)$$

$$m_z = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{q} \hat{\mu}_z(\mathbf{k}+\mathbf{q})(z, \mathbf{r}_2, \dots) e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{q})\mathbf{r}} \quad (6.4)$$

Mit dieser vorgegebenen Magnetisierung erhält man für das Potential

$$\Phi = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{q} (\mathcal{J}_\perp(\mathbf{k}+\mathbf{q}) \hat{\boldsymbol{\mu}}_\perp(\mathbf{k})(z, \mathbf{r}_2, \dots) + \mathcal{J}_z(\mathbf{k}+\mathbf{q}) \hat{\mu}_z(\mathbf{k})(z, \mathbf{r}_2, \dots)) e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{q})\mathbf{r}}. \quad (6.5)$$

Für eine Separation der Ordnungen entwickelt man die Integraloperatoren um \mathbf{k} :

$$\mathcal{J}_\perp(\mathbf{k}+\mathbf{q}) = \mathcal{J}_\perp(\mathbf{k}) + \varepsilon \nabla_k \mathcal{J}_\perp(\mathbf{k})|_{\mathbf{q}=0} \cdot \mathbf{q} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad , \quad (6.6)$$

die Entwicklung von $\mathcal{J}_z(\mathbf{k}+\mathbf{q})$ ergibt sich analog. Durch Einsetzen in (6.5) erhält man für den ersten Beitrag

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{(2\pi)^2} \mathcal{J}_\perp(\mathbf{k}) \int d\mathbf{q} \hat{\boldsymbol{\mu}}_\perp(\mathbf{k})(z, \mathbf{r}_2, \dots) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \varepsilon \nabla_k \mathcal{J}_\perp(\mathbf{k}) \cdot \int d\mathbf{q} \mathbf{q} \hat{\boldsymbol{\mu}}_\perp(\mathbf{k})(z, \mathbf{r}_2, \dots) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \dots \\ &= \mathcal{J}_\perp(\mathbf{k}) \boldsymbol{\mu}_\perp(\mathbf{k})(z, \mathbf{r}_1, \dots) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \varepsilon (-i)(\nabla_k \cdot \nabla_1) \mathcal{J}_\perp(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\mu}_\perp(\mathbf{k})(z, \mathbf{r}_1, \dots) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \dots \end{aligned} \quad (6.7)$$

und für den zweiten Beitrag die analogen Terme mit \mathcal{J}_z . Für die Ordnung ε ergibt sich also einfach ein Ableitungsterm, der ja aus der allgemeinen Ableitung in Kapitel 4 schon bekannt ist.²

Für $\mathbf{k} = 0$ ist \mathcal{J}_\perp aber singulär, weil der Grenzwert von $\frac{\mathbf{k}}{k}$ für $\mathbf{k} \rightarrow 0$ nicht definiert ist, und auch der Gradient $\nabla_k \mathcal{J}_z$ ist singulär. Daher sind direkt die Entwicklungen von \mathcal{J}_\perp und \mathcal{J}_z erforderlich. Mit (3.34) erhält man durch Entwicklung der

²Die Berücksichtigung der Potentialgleichung bei der Ableitung der Amplitudengleichung könnte also alternativ auch auf diese Weise erfolgen.

Greenschen Funktion

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{\perp \varepsilon \mathbf{q}} \hat{\boldsymbol{\mu}}_{\perp 0 \mathbf{q}} &= -\frac{i}{2\pi} \frac{\mathbf{q}}{q} \cdot \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \hat{\boldsymbol{\mu}}_{\perp 0 \mathbf{q}}(z', \mathbf{r}_2, \dots) dz' \\ &\quad + \varepsilon \frac{i}{2\pi} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} |z - z'| \hat{\boldsymbol{\mu}}_{\perp 0 \mathbf{q}}(z', \mathbf{r}_2, \dots) dz' + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\end{aligned}\quad (6.8)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{z \varepsilon \mathbf{q}} \mu_{z 0 \mathbf{q}} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \text{sgn}(z - z') \hat{\mu}_{z 0 \mathbf{q}}(z', \mathbf{r}_2, \dots) dz' \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{2\pi} |\mathbf{q}| \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} (z - z') \hat{\mu}_{z 0 \mathbf{q}}(z', \mathbf{r}_2, \dots) dz' + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad .\end{aligned}\quad (6.9)$$

Während der zweite Term in (6.8) und der erste Term in (6.9) zu lokalen Termen führen, da \mathbf{q} gar nicht mehr enthalten ist, sind die anderen beiden für nichtlokale Beiträge verantwortlich.

Die Magnetisierung liefert in der Ordnung ε^2 den ersten Beitrag zur Fouriermode $\mathbf{k} = 0$:

$$\boldsymbol{\mu}_{\perp 0}^{(2)} = \underline{\Gamma}_0(z, t) |A_1(\mathbf{r}_n, t_n)|^2, \quad \mu_{z 0}^{(2)} = -|\underline{u}_c(z, t)|^2 |A_1(\mathbf{r}_n, t_n)|^2 \quad (6.10)$$

Dabei ist $\boldsymbol{\mu}_{\perp 0}^{(2)}$ gerade die Fouriermode 0 von $\underline{m}^{(2)}$ (4.68), und $\mu_{z 0}$ ergibt sich mit (5.2).³ Setzt man die Fouriertransformierte

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\perp 0 \mathbf{q}}^{(2)}(z, \mathbf{r}_2, \dots) = \underline{\Gamma}_0(z, t) |\hat{A}_1|^2(\mathbf{q}, \mathbf{r}_2, \dots) \quad (6.11)$$

in (6.8) ein, ergibt sich für die $\mathbf{k} = 0$ -Mode des Potentials in zweiter Ordnung innerhalb des Films

$$\Psi_{0i}^{(2)} = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \underline{\Gamma}_0(z', t) dz' \cdot \int d\mathbf{q} \frac{\mathbf{q}}{q} |\hat{A}_1|^2(\mathbf{q}, \mathbf{r}_2, \dots) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_1} + \dots, \quad (6.12)$$

wobei \dots für weitere Terme steht, die lokale Beiträge liefern. Durch Fourierrücktransformation, die in Anhang E.2 ausgeführt ist, ergibt sich

$$\Psi_{0i}^{(2)} = - \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \underline{\Gamma}_0(z', t) dz' \cdot \nabla_1 \int d\mathbf{r}'_1 \frac{|A_1(\mathbf{r}'_1, \dots)|^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1|} + \dots \quad (6.13)$$

Der zweite Anteil von (6.9) liefert mit der Fouriertransformierten von $\mu_{z 0}$

$$\hat{\mu}_{z 0 \mathbf{q}}(z, \mathbf{r}_2, \dots) = -|\underline{u}_c(z, t)|^2 |\hat{A}_1|^2(\mathbf{q}, \mathbf{r}_2, \dots) \quad (6.14)$$

³Die fett dargestellten Vektoren beziehen sich auf die konkreten zwei- und dreidimensionalen Größen des Systems, die unterstrichenen Vektoren stammen aus der allgemeinen Ableitung, bei der das System eine beliebige Dimension haben konnte.

in dritter Ordnung den nichtlokalen Beitrag

$$\Psi_{0i}^{(3)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} (z - z') |\underline{u}_c(z', t)|^2 dz' \int d\mathbf{q} |\mathbf{q}| |\hat{A}_1|^2(\mathbf{q}, \mathbf{r}_2, \dots) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_1} + \dots \quad (6.15)$$

Durch Fourierrücktransformation, die in Anhang E.1.2 durchgeführt ist, ergibt sich schließlich

$$\Psi_{0i}^{(3)} = - \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} (z - z') |\underline{u}_c(z', t)|^2 dz' \Delta_1 \int d\mathbf{r}'_1 \frac{|A_1(\mathbf{r}'_1, \dots)|^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1|} + \dots \quad (6.16)$$

Auf diese Weise erhält man sehr kompakt die nichtlokalen Beiträge des Potentials. Um insbesondere die Bedeutung des Außenraums klarer herauszustellen, sollen sie im nächsten Abschnitt aber noch einmal auf eine andere Weise abgeleitet werden, die dem allgemeinen Vorgehen bei der Ableitung der Amplitudengleichung in Kapitel 4 entspricht.

6.2 Integration der magnetostatischen Potentialgleichung für die Fouriermode $\mathbf{k} = 0$

In diesem Abschnitt sollen die nichtlokalen Beiträge noch einmal durch die Integration der Potentialgleichung in jeder Ordnung hergeleitet werden. Im Unterschied zu Kapitel 4 müssen wir hier direkt die Gleichung für das magnetostatische Potential untersuchen: Die spezielle Form der Inhomogenität und der Randbedingungen ist wichtig, und die Lösung ist daher auch nicht sofort verallgemeinerbar.

Da die homogene Potentialgleichung linear ist, lässt sich die Lösung in die verschiedenen Beiträge der Inhomogenität zerlegen. Für $\mathbf{k} \neq 0$ bestimmen die Fouriermoden, die in der Inhomogenität auftreten, welche Fouriermoden das Potential enthält, da die homogene Lösung die triviale Lösung ist. Die Lösung für die in der Inhomogenität auftretenden Fouriermoden ist vollständig durch (3.33) bestimmt. Die Entwicklung der Gleichung für Inhomogenitäten mit $\mathbf{k} \neq 0$ ist schon aus der allgemeinen Ableitung bekannt. Für $\mathbf{k} = 0$ sind aber die Voraussetzungen zur Ableitung der Greenschen Funktion in Abschnitt 3.4.1 nicht erfüllt. Wegen der Neumannschen Randbedingungen enthält die homogene Lösung nämlich in jeder Ordnung eine Integrationskonstante. Daher muss die Lösung im Innen- und Außenraum separat für jede Ordnung bestimmt werden.

Wir betrachten also die magnetostatische Potentialgleichung für Beiträge mit Fouriermoden $\mathbf{k} = 0$

$$\Delta \Psi_0 = \begin{cases} 4\pi \nabla_{\perp} \cdot \boldsymbol{\mu}_{\perp 0} + \partial_z \mu_{z0} & |z| \leq \frac{d}{2} \\ 0 & |z| > \frac{d}{2} \end{cases}, \quad (6.17)$$

wobei $\boldsymbol{\mu}_{\perp 0}$, μ_{z0} und Ψ_0 gemäß (3.11) definiert sind. Die zugehörigen Randbedingungen sind durch

$$\partial_z \Psi_{0i} - \partial_z \Psi_{0a} = 4\pi \mu_{z0} \quad \text{für } z = \pm \frac{d}{2} \quad (6.18)$$

$$\partial_z \Psi_{0a} \rightarrow 0 \quad \text{für } z \rightarrow \infty \quad (6.19)$$

gegeben, und zusätzlich muss das Potential am Filmrand stetig sein:

$$\Psi_{0i} = \Psi_{0a} \quad \text{für } z = \pm \frac{d}{2} \quad . \quad (6.20)$$

Separiert man in (6.17) die Ordnungen, treten bei der Integration in jeder Ordnung sowohl im Innen- als auch im Außenraum die Integrationskonstanten $C_i^{(n)}$ bzw. $C_{a\pm}^{(n)}$ auf, wobei das obere Vorzeichen für $z > \frac{d}{2}$, das untere Vorzeichen für $z < -\frac{d}{2}$ steht. Sie können wie die Amplitude A von langsamen Ortsskalen \mathbf{r}_n abhängen⁴. Da der Außenraum in allen Richtungen unbeschränkt ist, kann $C_{a\pm}^{(n)}$ zusätzlich in der dritten Raumrichtung von langsamen Skalen z_n abhängen, die hier unter Berücksichtigung der Filmdicke durch

$$z_{n\pm} := \varepsilon^n (z \mp \frac{d}{2}), \quad n \geq 1 \quad (6.21)$$

definiert sind. Innerhalb des Films sind diese langsamen Skalen z_n wegen der Beschränkung auf die Filmdicke nicht nötig. Bei der Berechnung der $\mathbf{k} = 0$ -Mode des Potentials bis zur dritten Ordnung erhält man für den Innenraum⁵

$$\begin{aligned} \Psi_{0i} = & \varepsilon C_i^{(1)} + \varepsilon^2 \left(4\pi \tilde{\mu}_{z0}^{(2)}(\mathbf{r}_n, z) + b_i^{(2)}(\mathbf{r}_n)z + C_i^{(2)}(\mathbf{r}_n) \right) \\ & + \varepsilon^3 \left(4\pi \nabla_1 \cdot \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{\perp 0}^{(2)}(\mathbf{r}_n, z) + 4\pi \tilde{\mu}_{z0}^{(3)}(\mathbf{r}_n, z) - \frac{1}{2} \Delta_1 C_i^{(1)}(\mathbf{r}_n)z^2 + b_i^{(3)}(\mathbf{r}_n)z + C_i^{(3)}(\mathbf{r}_n) \right) \\ & + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \quad , \end{aligned} \quad (6.22)$$

während die Lösung für den Außenraum nur aus einer Summe der Integrationskonstanten $\varepsilon^n C_{a\pm}^{(n)}$ besteht. Der Beitrag in der Ordnung ε^2 in (6.22) ist also das Pendant zu dem $\mathbf{k} = 0$ -Beitrag $\underline{\psi}_0 |A_1|^2$ in $\underline{\Phi}^{(2)}$ (4.52) bei der allgemeinen Ableitung; in der Ordnung ε^3 wurden dort nur resonante Terme bestimmt. Der erste Term in zweiter Ordnung hier entspricht dem Beitrag $\mathcal{J}_{N0} \underline{F}^{(1\bar{1})}(\underline{u}_c, \underline{u}_c^*)$ der allgemeinen Ableitung, und die ersten beiden Terme in dritter Ordnung würden sich auch aus einer allgemeinen Ableitung wie in Kapitel 4 ergeben. Sie liefern also schon bekannte lokale Beiträge.

⁴Wie wir später bei der Bestimmung der Integrationskonstanten sehen werden, weisen die Integrationskonstanten auch schnelle und langsame zeitliche Variationen auf, die von der Magnetisierung diktiert werden. Da dies aber nur versklavte Abhängigkeiten sind, die hier nicht unmittelbar ersichtlich sind, werden sie zunächst weggelassen und erst bei der Bestimmung der Koeffizienten diskutiert.

⁵Um die Notation der vorangegangenen Kapitel beizubehalten, bezieht sich ∇_n hier weiterhin nur auf die langsamen Ableitungen in der Ebene (vgl. (4.50)).

Die räumlichen Variationen der Integrationskonstanten werden durch die Rand- und Stetigkeitsbedingungen (6.18)-(6.20) bestimmt, die sich in den einzelnen Ordnungen ergeben. Da aber nicht bei allen Bedingungen sofort ersichtlich ist, auf welche Weise sie die Integrationskonstanten bestimmen, geben wir vor der Durchführung der Multiple-Scale-Analyse zunächst die Differentialgleichungen und Randbedingungen für die Integrationskonstanten an:

Für $C_{a\pm}^{(1)}$ ergibt sich die Differentialgleichung

$$(\Delta_1 + \partial_{z_{1\pm}}^2) C_{a\pm}^{(1)}(\mathbf{r}_n, z_{n\pm}) = 0 \quad , \quad (6.23)$$

die unter Verwendung der Randbedingung

$$C_{a\pm}^{(1)}(\mathbf{r}_n, 0) = C_i^{(1)}(\mathbf{r}_n) \quad (6.24)$$

gelöst werden kann. Durch Einsetzen der Lösung in

$$\partial_{z_{1+}} C_{a+}^{(1)}(\mathbf{r}_n, 0) = \partial_{z_{1-}} C_{a-}^{(1)}(\mathbf{r}_n, 0) \quad (6.25)$$

wird dann $C_i^{(1)}$ festgelegt. Für die Bestimmung der Integrationskonstanten in zweiter Ordnung erhält man analog die Differentialgleichung

$$(\Delta_1 + \partial_{z_{1\pm}}^2) C_{a\pm}^{(2)}(\mathbf{r}_n, z_{n\pm}) + 2(\nabla_1 \cdot \nabla_2 + \partial_{z_{1\pm}} \partial_{z_{2\pm}}) C_{a\pm}^{(1)}(\mathbf{r}_n, z_{n\pm}) = 0 \quad , \quad (6.26)$$

die mit der Lösung für $C_{a\pm}^{(1)}$ und der Randbedingung

$$C_{a\pm}^{(2)}(\mathbf{r}_n, 0) = C_i^{(2)}(\mathbf{r}_n) \pm b_i^{(2)}(\mathbf{r}_n) \frac{d}{2} + 4\pi \tilde{\mu}_{z0}^{(2)}(\mathbf{r}_n, \pm \frac{d}{2}) \quad (6.27)$$

die Integrationskonstante $C_{a\pm}^{(2)}$ festlegt. $C_i^{(2)}$ wird dann durch

$$\begin{aligned} \Delta_1 C_i^{(1)}(\mathbf{r}_n) + \frac{4\pi}{d} \nabla_1 \cdot \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \boldsymbol{\mu}_{\perp 0}^{(2)}(\mathbf{r}_n, z') dz' + \frac{1}{d} \left(\partial_{z_{1+}} C_{a+}^{(2)}(\mathbf{r}_n, 0) \right. \\ \left. - \partial_{z_{1-}} C_{a-}^{(2)}(\mathbf{r}_n, 0) + \partial_{z_{2+}} C_{a+}^{(1)}(\mathbf{r}_n, 0) - \partial_{z_{2-}} C_{a-}^{(1)}(\mathbf{r}_n, 0) \right) = 0 \end{aligned} \quad (6.28)$$

bestimmt, während sich $b_i^{(2)}$ aus

$$b_i^{(2)}(\mathbf{r}_n) = \partial_{z_{1+}} C_{a+}^{(0)}(\mathbf{r}_n, 0) \quad (6.29)$$

ergibt. In dritter Ordnung ist $b_i^{(3)}$ durch

$$\begin{aligned} b_i^{(3)}(\mathbf{r}_n) = \frac{1}{2} \left(\partial_{z_{1+}} C_{a+}^{(2)}(\mathbf{r}_n, 0) + \partial_{z_{1-}} C_{a-}^{(2)}(\mathbf{r}_n, 0) + \partial_{z_{2+}} C_{a+}^{(1)}(\mathbf{r}_n, 0) + \partial_{z_{2-}} C_{a-}^{(1)}(\mathbf{r}_n, 0) \right) \\ - 2\pi \nabla_1 \cdot \left(\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{\perp 0}^{(2)}(\mathbf{r}_n, \frac{d}{2}) + \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{\perp 0}^{(2)}(\mathbf{r}_n, -\frac{d}{2}) \right) \end{aligned} \quad (6.30)$$

festgelegt. Die Integrationskonstante $C_i^{(3)}$ ist der Vollständigkeit halber in (6.22) aufgeführt, wird aber nicht mehr bestimmt, da sie keine schnellen Ortsabhängigkeiten enthält und daher im Gegensatz zu dem Term $b_i^{(3)}z$ für die niedrigste Ordnung der nichtlokalen Amplitudengleichung keine Rolle spielt. Bevor wir die Integrationskonstanten durch die aufgelisteten Gleichungen (6.23)-(6.30) im einzelnen bestimmen, sollen diese durch Integration des magnetostatischen Potentials in den einzelnen Ordnungen abgeleitet werden.

Ordnung ε

Im Außenraum lautet die Potentialgleichung

$$\partial_z^2 \Psi_{0a}^{(1)} = 0 \quad . \quad (6.31)$$

Wegen der Randbedingung im Unendlichen (6.19) darf das Potential keine linear in z ansteigenden Terme enthalten; daher ergibt sich die Lösung

$$\Psi_{0a}^{(1)} = C_{a\pm}^{(1)}(\mathbf{r}_n, z_{n\pm}) \quad . \quad (6.32)$$

mit den in (6.21) definierten Skalen. Da die Magnetisierung bei einer Instabilität mit $\mathbf{k}_c \neq 0$ in niedrigster Ordnung keinen $\mathbf{k} = 0$ -Beitrag liefert, ist auch die Gleichung für den Innenraum homogen:

$$\partial_z^2 \Psi_{0i}^{(1)} = 0 \quad . \quad (6.33)$$

Die erste Integration liefert eine Integrationskonstante, die aber wegen der Bedingung für den Filmrand (6.18) verschwinden muss:

$$\partial_z \Psi_{0i}^{(1)} = b_i^{(1)}(\mathbf{r}_n) = 0 \quad (6.34)$$

Durch eine weitere Integration ergibt sich als Lösung wie im Außenraum eine Integrationskonstante, die aber wegen der Beschränkung auf die Filmdicke nur von langsamen Ortsskalen in der Ebene abhängt:

$$\Psi_{0i}^{(1)} = C_i^{(1)}(\mathbf{r}_n) \quad (6.35)$$

Wegen der Stetigkeit (6.20) des Potentials gilt am Filmrand für die Integrationskonstanten innen und außen der Zusammenhang (6.24).

Ordnung ε^2

Für den Außenraum erhält man mit (6.17) wieder eine homogene Differentialgleichung

$$\partial_z^2 \Psi_{0a}^{(2)} = 0 \quad , \quad (6.36)$$

die analog zur ersten Ordnung

$$\Psi_{0a}^{(2)} = C_{a\pm}^{(2)}(\mathbf{r}_n, z_{n\pm}) \quad (6.37)$$

liefert. Da die Magnetisierung in zweiter Ordnung durch den Einfluss der Nichtlinearitäten auch Beiträge der Fouriermode $\mathbf{k} = 0$ hat⁶, enthält die Potentialgleichung für den Innenraum eine Inhomogenität:

$$\partial_z^2 \Psi_{0i}^{(2)} = 4\pi \partial_z \mu_{z0}^{(2)}(\mathbf{r}_n, z) \quad . \quad (6.38)$$

Der Anteil von $\boldsymbol{\mu}_{\perp 0}^{(2)}$ verschwindet dagegen bei der Divergenzbildung. Durch Integration erhält man

$$\partial_z \Psi_{0i}^{(2)} = 4\pi \mu_{z0}^{(2)}(\mathbf{r}_n, z) + b_i^{(2)}(\mathbf{r}_n) \quad . \quad (6.39)$$

Mit (6.18) liefern die Randbedingungen in zweiter Ordnung die beiden Gleichungen

$$4\pi \mu_{z0}^{(2)}(\mathbf{r}_n, \pm \frac{d}{2}) + b_i^{(2)}(\mathbf{r}_n) = \partial_{z_{1\pm}} C_{a\pm}^{(1)}(\mathbf{r}_n, 0) + 4\pi \mu_{z0}^{(2)}(\mathbf{r}_n, \pm \frac{d}{2}) \quad . \quad (6.40)$$

Da sich der erste Term auf der linken Seite und der letzte Term auf der rechten Seite aufheben, muss die Bedingung (6.25) erfüllt sein, die $C_i^{(1)}$ bestimmt, wie wir später sehen werden. Durch Integration erhält man

$$\Psi_{0i}^{(2)} = 4\pi \tilde{\mu}_{z0}^{(2)}(\mathbf{r}_n, z) + b_i^{(2)}(\mathbf{r}_n)z + C_i^{(2)}(\mathbf{r}_n) \quad (6.41)$$

mit

$$\tilde{\mu}_{z0}^{(2)}(\mathbf{r}_n, z) := \int_0^z \mu_{z0}^{(2)}(\mathbf{r}_n, z') dz' \quad . \quad (6.42)$$

$b_i^{(2)}$ ist dabei durch (6.29) festgelegt ist. Wegen der Stetigkeit am Filmrand (6.20) muss außerdem der Zusammenhang (6.27) gelten.

⁶Dies sind gerade die Beiträge (6.10); wir verwenden hier aber zunächst die allgemeinen Formen.

Ordnung ε^3

Mit der Lösung (6.32) lautet die Differentialgleichung für den Außenraum

$$\partial_z^2 \Psi_{0a}^{(3)} = -(\Delta_1 + \partial_{z_{1\pm}}^2) \Psi_{0a}^{(1)} = -(\Delta_1 + \partial_{z_{1\pm}}^2) C_{a\pm}^{(1)}(\mathbf{r}_n, z_{1\pm}) \quad . \quad (6.43)$$

Da diese Inhomogenität, die nicht von der schnellen Variablen z abhängt, bei der Integration anwachsende Terme liefern würde, müssen wir zur Erfüllung der Randbedingung (6.19) fordern, dass sie verschwindet. Also erhalten wir zur Bestimmung von $C_{a\pm}^{(1)}$ die Differentialgleichung (6.26). Damit ist (6.43) homogen, und die Lösung lautet analog zu den niedrigeren Ordnungen

$$\Psi_{0a}^{(3)} = C_{a\pm}^{(3)}(\mathbf{r}_n, z_{n\pm}) \quad . \quad (6.44)$$

Zur Inhomogenität im Innenraum liefern jetzt sowohl $\mu_{z0}^{(3)}$ als auch $\boldsymbol{\mu}_{\perp 0}^{(2)}$ einen Beitrag. Hinzu kommt eine weitere Inhomogenität durch die langsamen Ortsableitungen des Potentials in erster Ordnung. Setzt man $\Psi_{0i}^{(1)}$ (6.35) gleich ein, folgt

$$\partial_z^2 \Psi_{0i}^{(3)} = 4\pi \nabla_1 \cdot \boldsymbol{\mu}_{\perp 0}^{(2)}(\mathbf{r}_n, z) + 4\pi \partial_z \mu_{z0}^{(3)}(\mathbf{r}_n, z) - \Delta_1 C_i^{(1)} \quad . \quad (6.45)$$

Durch Integration ergibt sich

$$\partial_z \Psi_{0i}^{(3)} = 4\pi \nabla_1 \cdot \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{\perp 0}^{(2)}(\mathbf{r}_n, z) + 4\pi \mu_{z0}^{(3)}(\mathbf{r}_n, z) - \Delta_1 C_i^{(1)}(\mathbf{r}_n) z + b_i^{(3)}(\mathbf{r}_n) \quad (6.46)$$

mit

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{\perp 0}^{(2)}(\mathbf{r}_n, z) := \int_0^z \boldsymbol{\mu}_{\perp 0}^{(2)}(\mathbf{r}_n, z') dz' \quad . \quad (6.47)$$

Die Randbedingungen (6.18) lauten in dritter Ordnung

$$4\pi \nabla_1 \cdot \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{\perp 0}^{(2)}(\mathbf{r}_n, \pm \frac{d}{2}) + b_i^{(3)}(\mathbf{r}_n) \mp \Delta_1 C_i^{(1)}(\mathbf{r}_n) \frac{d}{2} = \partial_{z_{1\pm}} C_{a\pm}^{(2)}(\mathbf{r}_n, 0) + \partial_{z_{2\pm}} C_{a\pm}^{(1)}(\mathbf{r}_n, 0) \quad . \quad (6.48)$$

Durch Addition der beiden Gleichungen wird die Integrationskonstante $b_i^{(3)}$ bestimmt, während das Ergebnis der Subtraktion die Bedingungsgleichung (6.28) ist, die zur Bestimmung von $C_i^{(2)}$ dienen wird. Durch Integration von (6.46) erhält man in der dritten Ordnung für das Potential im Innenraum

$$\Psi_{0i}^{(3)} = 4\pi \nabla_1 \cdot \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{\perp 0}^{(2)}(\mathbf{r}_n, z) + 4\pi \tilde{\mu}_{z0}^{(3)}(\mathbf{r}_n, z) - \frac{1}{2} \Delta_1 C_i^{(1)}(\mathbf{r}_n) z^2 + b_i^{(3)}(\mathbf{r}_n) z + C_i^{(3)}(\mathbf{r}_n) \quad (6.49)$$

mit

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{\perp 0}^{(2)}(\mathbf{r}_n, z) := \int_0^z \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{\perp 0}^{(2)}(\mathbf{r}_n, z') dz' \quad (6.50)$$

$$\tilde{\mu}_{z0}^{(3)}(\mathbf{r}_n, z) := \int_0^z \mu_{z0}^{(3)}(\mathbf{r}_n, z') dz' \quad . \quad (6.51)$$

Ordnung ε^4

Aus der Differentialgleichung für den Außenraum

$$\partial_z^2 \Psi_{0a}^{(4)} = - (\Delta_1 + \partial_{z_{1\pm}}^2) C_{a\pm}^{(2)}(\mathbf{r}_n, z_{n\pm}) - 2 (\nabla_1 \cdot \nabla_2 + \partial_{z_{1\pm}} \partial_{z_{2\pm}}) C_{a\pm}^{(1)}(\mathbf{r}_n, z_{n\pm}) \quad (6.52)$$

ergibt sich wie in dritter Ordnung aus der Randbedingung (6.19) die Forderung, dass die Inhomogenität verschwinden muss. Diese Bedingung liefert die Differentialgleichung (6.26) zur Bestimmung von $C_{a\pm}^{(2)}$.

Damit haben wir alle Gleichungen (6.23)-(6.30) zur Bestimmung der relevanten Integrationskonstanten erhalten. Die Lösung der Potentialgleichung in vierter Ordnung wird für die Bestimmung nichtlokaler Terme der Amplitudengleichung in der niedrigsten relevanten Ordnung nicht mehr benötigt.

Zur vollständigen Ermittlung der Lösung (6.22) müssen nun noch die gewonnenen Differentialgleichungen gelöst und damit die Integrationskonstanten $C_i^{(n)}$ und $b_i^{(n)}$ bestimmt werden.

6.2.1 Bestimmung der Integrationskonstanten

Wir haben für $C_{a\pm}^{(n)}$ jeweils in der Ordnung ε^{n+2} eine Differentialgleichung für den Außenraum und zusätzlich durch die Stetigkeitsbedingung in der Ordnung ε^n Randbedingungen an den Stellen $z_{n\pm} = 0$ erhalten. In jeder Ordnung ergibt sich also ein Dirichletsches Randwertproblem, das mit der zugehörigen Greenschen Funktion für einen Halbraum gelöst werden kann.

Damit erhält man $C_{a\pm}^{(n)}$ in Abhängigkeit von $C_i^{(n)}$ sowie Beiträgen der Magnetisierung. Durch die Bedingungen am Filmrand in der Ordnung ε^{n+1} ergeben sich mit dieser Kenntnis $b_i^{(n+1)}$ und eine Bestimmungsgleichung für $C_i^{(n)}$.

Ordnung ε

$C_{a\pm}^{(1)}$ ist durch die Differentialgleichung (6.23) mit der Randbedingung (6.24) festgelegt. Zu lösen ist also eine dreidimensionale Laplace-Gleichung $\Delta \xi(\mathbf{R}) = 0$ mit vorgegebenem Randwert $\xi(\mathbf{r}, 0)$.

Mit der Greenschen Funktion der Poisson-Gleichung mit Dirichletschen Randbedingungen für den Halbraum $z \geq 0$

$$\mathcal{G}_D(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|} - \frac{1}{|\mathbf{R} - \tilde{\mathbf{R}}'|} \right), \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ z \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ -z \end{pmatrix} \quad (6.53)$$

lautet ihre Lösung [Bart]

$$\xi(\mathbf{R}) = \int d\mathbf{r}' \xi(\mathbf{r}', 0) \partial_{z'} \mathcal{G}_D(\mathbf{R}, \mathbf{R}')|_{z'=0} \quad . \quad (6.54)$$

Damit erhält man⁷

$$C_{a\pm}^{(1)}(\mathbf{r}_n, z_{n\pm}) = \pm \frac{1}{2\pi} \int d\mathbf{r}'_1 \frac{z_{1\pm} C_i^{(1)}(\mathbf{r}'_n)}{[(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1)^2 + z_{1\pm}^2]^{\frac{3}{2}}} \quad . \quad (6.56)$$

Wird diese Lösung in die Randbedingung (6.28) eingesetzt, ergibt sich

$$C_i^{(1)}(\mathbf{r}_n) = 0 \quad . \quad (6.57)$$

Damit gilt wegen (6.56) auch

$$C_{a\pm}^{(1)} = 0 \quad . \quad (6.58)$$

Ordnung ε^2

Da $C_{a\pm}^{(1)}$ verschwindet, ist wegen (6.29) auch

$$b_i^{(2)}(\mathbf{r}_n) = 0 \quad . \quad (6.59)$$

Außerdem verschwindet in (6.26) der zweite Term; die Differentialgleichung für $C_{a\pm}^{(2)}$ ist also auch homogen:

$$(\Delta_1 + \partial_{z_{1\pm}}^2) C_{a\pm}^{(2)}(\mathbf{r}_n, z_{n\pm}) = 0 \quad (6.60)$$

und kann daher mit Hilfe derselben Greenschen Funktion (6.53) gelöst werden wie in der Ordnung ε . Mit der Randbedingung (6.27) erhält man die Lösung

$$C_{a\pm}^{(2)}(\mathbf{r}_n, z_{n\pm}) = \pm \frac{1}{2\pi} \int d\mathbf{r}'_1 \frac{z_{1\pm} \left(C_i^{(2)}(\mathbf{r}'_n) + 4\pi \tilde{\mu}_{z_0}^{(2)}(\mathbf{r}'_n, \pm \frac{d}{2}) \right)}{[(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1)^2 + z_{1\pm}^2]^{\frac{3}{2}}} \quad . \quad (6.61)$$

⁷Für $z_{1\pm} \rightarrow 0$ muss sich hier also eine Darstellung der δ -Funktion ergeben. Für das analoge zweidimensionale Problem mit der Ableitung der analogen Greenschen Funktion

$$\partial_{z'} \mathcal{G}_D^{(2)}(x, x', z, z') \Big|_{z'=0} = \frac{1}{\pi} \frac{z}{(x - x')^2 + z^2} \quad (6.55)$$

lässt sich leicht erkennen, dass sich für $z \rightarrow 0$ die eindimensionale δ -Funktion $\delta(x - x')$ ergibt; für den obigen Ausdruck lässt sich in der Tat verifizieren, dass es sich hier um eine Darstellung der zweidimensionalen δ -Funktion handelt.

Bildet man die Ableitung nach $z_{1\pm}$ und setzt sie in die Bestimmungsgleichung (6.28) ein, resultiert eine Integralgleichung für $C_i^{(2)}$:

$$\int d\mathbf{r}'_1 \left(C_i^{(2)}(\mathbf{r}'_n) + 4\pi \left(\tilde{\mu}_{z0}^{(2)}(\mathbf{r}'_n, \frac{d}{2}) + \tilde{\mu}_{z0}^{(2)}(\mathbf{r}'_n, -\frac{d}{2}) \right) \right) K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1) = 4\pi \nabla_1 \cdot \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \boldsymbol{\mu}_{\perp 0}^{(2)}(\mathbf{r}_n, z') dz' \quad (6.62)$$

mit dem Kern

$$K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1) = \frac{1}{\pi} \lim_{z_{1\pm} \rightarrow 0} \left(\frac{1}{[(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1)^2 + z_{1\pm}^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{3z_{1\pm}^2}{[(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1)^2 + z_{1\pm}^2]^{\frac{5}{2}}} \right) \quad (6.63)$$

$$= \frac{1}{\pi} \Delta_1 \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1|} \quad . \quad (6.64)$$

Lösung der Integralgleichung

Setzt man $\boldsymbol{\mu}_{\perp 0}^{(2)}$ (6.10) in (6.62) ein, lässt sich die Integralgleichung mit Hilfe von Fouriertransformationen lösen (siehe Anhang E.2). Man erhält für den nichtlokalen Anteil

$$C_i^{(2)} = \mathbf{d}(t) \cdot \nabla_1 \int \frac{|A_1(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_2, \dots, t_n)|^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1|} d\mathbf{r}'_1 + \dots \quad (6.65)$$

mit

$$\mathbf{d}(t) = - \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \underline{\Gamma}_0(z, t) dz \quad . \quad (6.66)$$

Bei der Lösung wurden lokale Beiträge weggelassen, da sie, wie wir unten sehen werden, vernachlässigt werden können.

Ordnung ε^3

Mit (6.58) und (6.61) folgt aus (6.30)

$$b_i^{(3)}(\mathbf{r}_n) = \pi \int d\mathbf{r}'_1 K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1) \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \mu_{z0}^{(2)}(\mathbf{r}'_n, z') dz' - 2\pi \nabla_1 \cdot \left(\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{\perp 0}^{(2)}(\mathbf{r}_n, \frac{d}{2}) + \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{\perp 0}^{(2)}(\mathbf{r}_n, -\frac{d}{2}) \right) . \quad (6.67)$$

Durch Einsetzen von $\mu_{z0}^{(2)}$ (6.10) ergibt sich für den nichtlokalen Anteil

$$b_i^{(3)} = e(t) \Delta_1 \int d\mathbf{r}'_1 \frac{|A_1(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_2, \dots, t_n)|^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1|} \quad (6.68)$$

mit

$$e(t) = - \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} |\underline{u}_c(z', t)|^2 dz' \quad . \quad (6.69)$$

Mit den nun bestimmten Integrationskonstanten erhält man für das Potential im Innenraum einschließlich der Ordnung ε^3

$$\begin{aligned} \Psi_{0i} = & \varepsilon^2 \left(4\pi \tilde{\mu}_{z0}^{(2)}(\mathbf{r}_n, z) + C_i^{(2)}(\mathbf{r}_n) \right) \\ & + \varepsilon^3 \left(4\pi \nabla_1 \cdot \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{\perp 0}^{(2)}(\mathbf{r}_n, z) + 4\pi \tilde{\mu}_{z0}^{(3)}(\mathbf{r}_n, z) + b_i^{(3)}(\mathbf{r}_n)z + C_i^{(3)}(\mathbf{r}_n) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \quad . \end{aligned} \quad (6.70)$$

Vergleichen wir dieses Ergebnis mit denen aus Abschnitt 6.1, entspricht der nichtlokale Anteil von $C_i^{(2)}$ (6.65) mit \mathbf{d} (6.66) genau dem dort berechneten nichtlokalen Beitrag $\Psi_{0i}^{(2)}$ (6.13). Der nichtlokale Anteil des Terms $b_i^{(3)}z$ entspricht mit (6.67) und (6.69) gerade dem Anteil proportional zu z in (6.16), während der Anteil ohne z -Abhängigkeit hier in $C_i^{(3)}$ enthalten ist. Diese Integrationskonstante wurde aber gar nicht mehr bestimmt, denn für die Amplitudengleichung spielt sie in der niedrigsten relevanten Ordnung keine Rolle, da sie auf Grund der Potentialeigenschaft herausfällt.

6.3 Amplitudengleichung

In Kenntnis der Lösung der Potentialgleichung wollen wir nun untersuchen, welche Auswirkungen sich durch die nichtlokalen Beiträge auf die Multiple-Scale-Analyse der dynamischen Gleichung und damit auf eine Amplitudengleichung zur Beschreibung der Modulationsstrukturen oberhalb der Schwelle ergeben. Sie selbst sind nicht resonant und können also nur über nichtlineare Beiträge in der Säkularbedingung auftreten.

Die nichtlokale Kopplung Φ ist hier im Gegensatz zur allgemeinen Ableitung in Kapitel 4 explizit eindimensional⁸, weil die auftretenden Terme dann einfacher und besser verständlich sind, aber die Formulierung wird möglichst allgemein gehalten, weil dadurch beispielsweise ein Bezug zu hydrodynamischen Systemen möglich wird. Die einzige Voraussetzung besteht darin, dass es sich bei der zeitlich versklavten Variablen Φ auf jeden Fall um ein Potential handelt, d. h. in der dynamischen Gleichung tritt nur der Gradient von Φ auf (die Operatoren $\underline{\mathcal{L}}_b$ und $\underline{\mathcal{N}}_b$ enthalten also nur Terme mit Ableitungen bezüglich Φ).

⁸Für die allgemeine Ableitung spielt es keine Rolle, welche Dimension die nichtlokale Kopplung hat. Ist sie ein Skalar, fallen entsprechend die Summen über die Komponenten der Vektoren bei den Koeffizienten der Bewegungsgleichungen weg.

Wir untersuchen also zunächst allgemein, wie die Beiträge des Potentials $\varepsilon^2 C_i^{(2)} + \varepsilon^3 b_i^{(3)} z$ an die allgemeine dynamische Gleichung ankoppeln, ohne von den konkreten Beiträgen für den ferromagnetischen Film Gebrauch zu machen. Die expliziten Koeffizienten für den Film werden dann im Anschluss berechnet.

Wie man an (6.65) und (6.68) erkennt, enthalten $C_i^{(2)}$ und $b_i^{(3)}$ eine durch die Magnetisierung aufgeprägte Zeitabhängigkeit. Diese macht sich mittels \mathbf{d} (6.66) und e (6.69) auf schnellen und über die Amplitude A_1 auf langsamen Skalen bemerkbar. Da die schnelle, periodische Zeitabhängigkeit⁹ entscheidet, ob ein resonanter Term auftritt, spalten wir sie hier von den langsamen Skalen ab:

$$C_i^{(2)}(t, \mathbf{r}_n, t_n) =: \sum_n e^{in\Omega t} C_{in}^{(2)}(\mathbf{r}_n, t_n) \quad (6.71)$$

$$b_i^{(3)}(t, \mathbf{r}_n, t_n) =: \sum_n e^{in\Omega t} b_{in}^{(3)}(\mathbf{r}_n, t_n) \quad . \quad (6.72)$$

Der niedrigste nichtlokale Beitrag des Potentials tritt mit $C_i^{(2)}$ in der Ordnung ε^2 auf. Dieser tritt aber im linearen Anteil in der Amplitudengleichung in zweiter Ordnung nicht auf, da wir vorausgesetzt haben, dass die dynamische Gleichung nur den Gradienten des Potentials enthält, $C_i^{(2)}$ aber nicht von schnellen Ortsskalen abhängt. Aus demselben Grund gibt es in der dynamischen Gleichung auch keinen nichtlokalen nichtlinearen Beitrag in der Ordnung ε^3 . Die Amplitudengleichung enthält also in der niedrigsten Ordnung keine nichtlokalen Terme, daher müssen wir für diese Effekte bis zur Ordnung ε^4 entwickeln.

Bei der Entwicklung werden im folgenden nur diejenigen Terme berücksichtigt, die die nichtlokalen Terme des Potentials enthalten. Terme, die nur die Amplituden $A^{(n)}$ oder ihre räumlichen Ableitungen enthalten, werden weggelassen: Sie dienen in vierter Ordnung nur zur Resummation der bereits existierenden Terme, liefern aber keine qualitativ neuen Effekte und sind daher gegenüber Termen in dritter Ordnung vernachlässigbar. Aus diesem Grund werden auch alle lokalen Beiträge zu $C_i^{(2)}$ und $b_i^{(3)}$ nicht weiter berücksichtigt.

Erst in der Ordnung ε^3 treten also in (4.86) die nichtlokalen Beiträge des Potentials

$$\left(\underline{\mathcal{L}}_b^{(0)} \Psi_{0i}^{(2)} \right)^{[1]} = (-i)(\nabla_k \cdot \nabla_1) \underline{\mathcal{L}}_{b0} C_i^{(2)} + \dots \quad (6.73)$$

$$\left(\underline{\mathcal{L}}_b^{(0)} \Psi_{0i}^{(3)} \right)^{[0]} = \underline{\mathcal{L}}_{b0} b_i^{(3)} z + \dots \quad (6.74)$$

auf, wobei \dots hier für zusätzliche lokale Terme steht. Dadurch enthält die Lösung

⁹Die Periodizität ergibt sich durch die periodischen Koeffizienten der Magnetisierung

für $\underline{m}^{(3)}$ die nichtresonanten Terme¹⁰

$$\underline{m}^{(3)} = \sum_n \left(\underline{\gamma}_{0xn} \partial_{x_1} C_{in}^{(2)} + \underline{\gamma}_{0yn} \partial_{y_1} C_{in}^{(2)} + \underline{\gamma}_{0bn} b_{in}^{(3)} \right) + \dots \quad (6.75)$$

mit

$$\underline{\gamma}_{0xn} = -i \int_0^\infty \mathcal{U}_0(t, t-t') \underline{L}_{b0}^{(100)} e^{in\Omega(t-t')} dt' \quad (6.76)$$

$$\underline{\gamma}_{0yn} = -i \int_0^\infty \mathcal{U}_0(t, t-t') \underline{L}_{b0}^{(010)} e^{in\Omega(t-t')} dt' \quad (6.77)$$

$$\underline{\gamma}_{0bn} = \int_0^\infty \mathcal{U}_0(t, t-t') \underline{L}_{b0}^{(001)} e^{in\Omega(t-t')} dt', \quad (6.78)$$

wobei berücksichtigt wurde, dass nur die Anteile von \underline{L}_b mit ersten Ableitungen von Null verschiedene Beiträge liefern.

In der Ordnung ε^4 können wegen der Nichtlinearitäten der dynamischen Gleichung bzw. der nichtlokalen Kopplung folgende resonante Terme auftreten, die $C_i^{(2)}$ oder $b_i^{(3)}$ enthalten:

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{N}_{2a}[\underline{m}, \underline{m}] \right)^{(4)} &= \sum_n \left(A_1 \underline{B}_a^{(10)}(\underline{u}_c, \underline{\gamma}_{0xn}) \partial_{x_1} C_{in}^{(2)} e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} \right. \\ &\quad + A_1 \underline{B}_a^{(10)}(\underline{u}_c, \underline{\gamma}_{0yn}) \partial_{y_1} C_{in}^{(2)} e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} \\ &\quad \left. + A_1 \underline{B}_a^{(10)}(\underline{u}_c, \underline{\gamma}_{0bn}) b_{in}^{(3)} e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} \right) + \dots \end{aligned} \quad (6.79)$$

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{N}_{2b}[\underline{m}, \Phi] \right)^{(4)} &= \sum_n \left(A_1 \tilde{\underline{B}}_{b,x}^{(10)}(\underline{u}_c, e^{in\Omega t}) \partial_{x_1} C_{in}^{(2)} e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} \right. \\ &\quad + A_1 \underline{B}_{b,y}^{(10)}(\underline{u}_c, e^{in\Omega t}) \partial_{y_1} C_{in}^{(2)} e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} \\ &\quad \left. + A_1 \tilde{\underline{B}}_b^{(10)}(\underline{u}_c, e^{in\Omega t}) b_{in}^{(3)} e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} \right) + \dots \end{aligned} \quad (6.80)$$

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{L}_b^{(0)} \Phi^{(4)} \right)^{[0]} &= \sum_n \left((-i) A_1 \partial_{k_x} \mathcal{L}_{bc} \mathcal{J}_{Nc} F^{(10)}(\underline{u}_c, \underline{\gamma}_{0xn}) \partial_{x_1} C_{in}^{(2)} e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} \right. \\ &\quad + (-i) A_1 \partial_{k_y} \mathcal{L}_{bc} \mathcal{J}_{Nc} F^{(10)}(\underline{u}_c, \underline{\gamma}_{0yn}) \partial_{y_1} C_{in}^{(2)} e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} \\ &\quad \left. + A_1 \mathcal{L}_{bc} \mathcal{J}_{Nc} F^{(10)}(\underline{u}_c, \underline{\gamma}_{0bn}) b_{in}^{(3)} e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} + \omega_c t)} \right) + \dots \end{aligned} \quad (6.81)$$

Der erste Term (6.79) enthält den nichtresonanten Beitrag $\underline{m}^{(3)}$ (6.75), während sich (6.80) durch Beiträge der Differentialoperatoren der Ordnung ε ergibt, die in (4.29)

¹⁰In Kapitel 4 wurde die Lösung für $\underline{m}^{(3)}$ nicht mehr benötigt, da die dritte Ordnung bereits die Amplitudengleichung lieferte.

auftreten, wobei für die Koeffizienten die Abkürzungen

$$\tilde{B}_{b,x}^{(10)}(\underline{u}_c, e^{in\Omega t}) := i \sum_{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1} (ik_{cx})^{\alpha_1} (ik_{cy})^{\beta_1} \partial_z^{\gamma_1} \underline{B}_{a/b}^{(\alpha_1 1 \beta_1 0 \gamma_1 0)} \{\underline{u}_c, e^{in\Omega t}\} \quad (6.82)$$

$$\tilde{B}_{b,y}^{(10)}(\underline{u}_c, e^{in\Omega t}) := i \sum_{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1} (ik_{cx})^{\alpha_1} (ik_{cy})^{\beta_1} \partial_z^{\gamma_1} \underline{B}_{a/b}^{(\alpha_1 0 \beta_1 1 \gamma_1 0)} \{\underline{u}_c, e^{in\Omega t}\} \quad (6.83)$$

$$\tilde{B}_b^{(10)}(\underline{u}_c, e^{in\Omega t}) := \sum_{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1} (ik_{cx})^{\alpha_1} (ik_{cy})^{\beta_1} \partial_z^{\gamma_1} \underline{B}_{a/b}^{(\alpha_1 0 \beta_1 0 \gamma_1 1)} \{\underline{u}_c, e^{in\Omega t}\}. \quad (6.84)$$

verwendet wurden. Die Nichtlinearität der Potentialgleichung liefert in der vierten Ordnung einen resonanten nichtlokalen Beitrag, der in der dynamischen Gleichung zu dem Term (6.81) führt. \mathcal{N}_{3b} liefert in dieser Ordnung keine resonanten Terme, und Beiträge anderer Nichtlinearitäten sind von höherer Ordnung; insbesondere reicht die Entwicklung der Bewegungsgleichung bis zur dritten Ordnung aus.

Durch diese resonanten Beiträge ergeben sich wegen der Säkularbedingung (4.39) in der Ordnung ε^4 für die Amplitudengleichung (4.111) die zusätzlichen Terme

$$\sum_n \left(A_1 \mathbf{g}_n \cdot \nabla_1 C_{in}^{(2)} + h_n A_1 b_{in}^{(3)} \right) \quad (6.85)$$

mit den Koeffizienten

$$g_{x/yn} = \frac{\int_0^T (\underline{v}_c | \underline{H}_{x/yn}) dt}{\int_0^T (\underline{v}_c | \underline{u}_c) dt} \quad (6.86)$$

$$h_n = \frac{\int_0^T (\underline{v}_c | \underline{H}_{bn}) dt}{\int_0^T (\underline{v}_c | \underline{u}_c) dt} \quad (6.87)$$

Dabei fassen die Abkürzungen

$$\underline{H}_{x/yn}(z, t) := \underline{B}_a^{(10)}(\underline{u}_c, \underline{\gamma}_{0x/yn}) + \tilde{B}_{b,x/y}^{(10)}(\underline{u}_c, e^{in\Omega t}) + \mathcal{L}_{bc} \mathcal{J}_{Nc} F^{(10)}(\underline{u}_c, \underline{\gamma}_{0x/yn}) \quad (6.88)$$

$$\underline{H}_{bn}(z, t) := \underline{B}_a^{(10)}(\underline{u}_c, \underline{\gamma}_{0bn}) + \tilde{B}_b^{(10)}(\underline{u}_c, e^{in\Omega t}) + \mathcal{L}_{bc} \mathcal{J}_{Nc} F^{(10)}(\underline{u}_c, \underline{\gamma}_{0bn}) \quad (6.89)$$

die Beiträge der quadratischen Nichtlinearitäten zusammen.

6.3.1 Ferromagnetischer Film

Um die nichtlokalen Beiträge $C_i^{(2)}$ aus (6.65) und $b_i^{(3)}$ aus (6.67) in (6.85) einsetzen zu können, müssen die Koeffizienten \mathbf{d} und e gemäß (6.71) und (6.72) zerlegt werden.

Damit erhält man für den ferromagnetischen Film also die nichtlokale Amplitudengleichung

$$(\partial_{t_2} - v_{gy}\partial_{y_2}) A_1 = \mu A_1 + (D_x \partial_{x_1}^2 + D_y \partial_{y_1}^2) A_1 + r |A_1|^2 A_1 + \varepsilon A_1 \langle \nabla_1 | G \nabla_1 \rangle \int d\mathbf{r}'_1 \frac{|A_1(\mathbf{r}'_1)|^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1|} , \quad (6.90)$$

wobei sich der Koeffizient des nichtlokalen Terms aus dem dyadischen Produkt der Koeffizienten \mathbf{g}_n (6.86) und h_n (6.87) mit den Fourierkomponenten \mathbf{d}_n und e_n ergibt:

$$\underline{\underline{G}} = \sum_n (|\mathbf{g}_n\rangle \langle \mathbf{d}_n| + h_n e_n \underline{\underline{1}}) . \quad (6.91)$$

Der nichtlokale Term ist formal von höherer Ordnung als die anderen Beiträge. Er ergibt sich aber natürlicherweise durch den Einfluss des Potentials und liefert im Gegensatz zu lokalen Korrekturen, die sich in vierter Ordnung ergeben würden und gegenüber Termen in dritter Ordnung vernachlässigt werden können, einen qualitativ neuen Beitrag. Für die Dynamik oberhalb der Instabilitätsschwelle spielt er deshalb eine wichtige Rolle.¹¹

6.3.2 Koeffizientenverlauf

Für den ferromagnetischen Film verschwinden die Beiträge von \underline{B}_a , da keine quadratische Nichtlinearität allein im \underline{m}_\perp vorhanden ist, wie man an der Entwicklung der dynamischen Gleichung (3.5) sieht. Außerdem gilt $\gamma_{0b} = 0$, da der lineare Operator $\underline{\mathcal{L}}_b$ keine z -Ableitung enthält (vgl. (3.6)). Zu \underline{g}_n und h_n tragen also nur

$$\underline{H}_{x/yn}(z, t) = \underline{\mathcal{L}}_{bc} \mathcal{J}_{Nc} F^{(10)}(\underline{u}_c, \gamma_{0x/yn}) \quad \text{bzw.} \quad \underline{H}_{bn}(z, t) = \tilde{\underline{B}}_b^{(10)}(\underline{u}_c, e^{in\Omega t}) \quad (6.92)$$

bei. Der erste Term von $\underline{\underline{G}}$ ergibt sich also mit der Nichtlinearität der Potentialgleichung, während der zweite Term aus der Nichtlinearität der dynamischen Gleichung stammt. Die zeitliche Abhängigkeit der Koeffizienten \mathbf{d} (6.66) und e (6.69) ergibt sich aus der Zeitabhängigkeit der kritischen Eigenvektoren, die aus der störungstheoretischen Behandlung in Kapitel 3 bzw. Anhang A bekannt sind.

Für die symmetrischen Moden des XY -Modells verschwindet der Koeffizient \mathbf{d} durch die Integration über die Filmdicke, $\underline{\underline{G}}$ ist also orthogonal. Dagegen treten für die genäherten Moden bei isotropem Austausch ohne Parität auch Nichtdiagonalelemente auf. Die Koeffizienten können mit einem Programm für symbolische Mathematik [Wolf] berechnet werden (siehe Abbildung 6.1).

¹¹Im Rayleigh-Bénard-System treten bei festen Randbedingungen nichtlokale Effekte auch erst in der vierten Ordnung auf; dies hat allerdings andere Ursachen, die in Abschnitt 6.4 diskutiert werden.

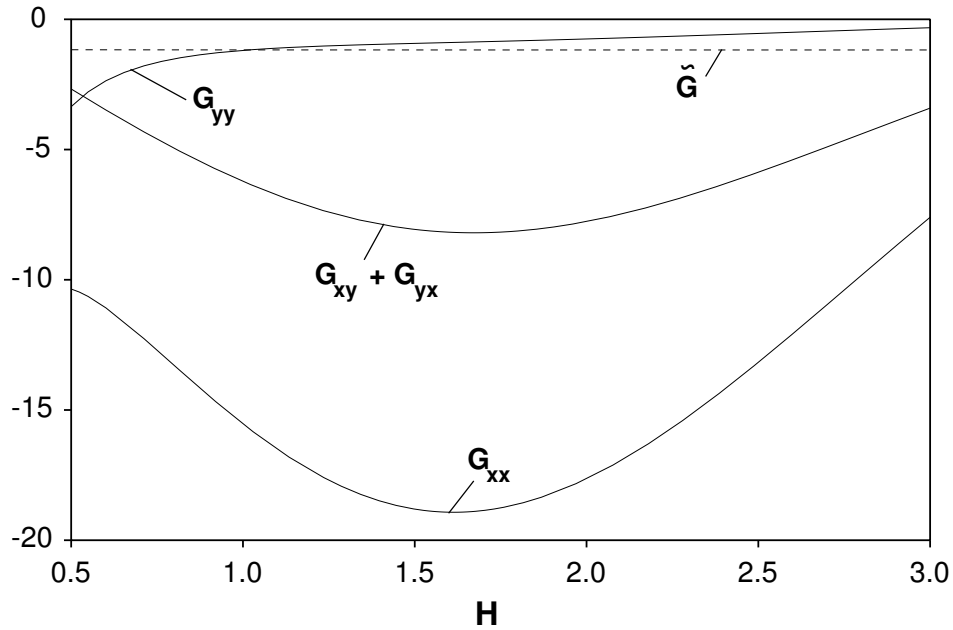


Abbildung 6.1: Koeffizienten des nichtlokalen Terms in der niedrigsten Ordnung η^0 . Die Matricelemente für den isotropen Austausch sind durchgezogen dargestellt. G_{xx} und G_{yy} bezeichnen die Imaginärteile der Diagonalelemente, die Nichtdiagonalelemente G_{xy} und G_{yx} sind dagegen reell. Bei anisotropem XY-Austausch ergibt sich nur der eine gestrichelte Koeffizient \tilde{G} , der wie die Diagonalelemente bei isotropem Austausch rein imaginär ist. Ein Realteil würde sich wie beim nichtlinearen Koeffizienten r erst in der Ordnung η ergeben.

6.4 Vergleich mit hydrodynamischem Mean Drift

Bei der Strukturbildung in hydrodynamischen Systemen können durch langreichweitige Wechselwirkungen sogenannte Mean-Drift-Beiträge hervorgerufen werden. Diese treten beispielsweise bei Rayleigh-Bénard-Konvektion [SiZi, ZiSi] mit freien Randbedingungen auf: Formal erhält man durch einen zusätzlichen Nulleigenvektor, der auf Grund der Galilei-Invarianz in der Ebene existiert, zwei gekoppelte dynamische Gleichungen zur Beschreibung der Dynamik oberhalb der Schwelle.

In anderen Systemen, z. B. bei Rayleigh-Bénard-Konvektion mit festen Randbedingungen [Cr83] oder in ozeanischen Ekman-Schichten [HaLe], existiert kein zusätzlicher Nulleigenvektor, aber durch die Inkompressibilität der Flüssigkeit sorgt der Druck für langreichweitige Wechselwirkungen. Die dort auftretenden nichtlokalen Effekte können für den anisotropen Fall im Rahmen unserer Analyse des ferromagnetischen Systems hier qualitativ verstanden werden: Da die Bewegungsgleichung für die Geschwindigkeit auch nur den Gradienten des Drucks enthält, spielt dieser die Rolle des Potentials.

Aus der Bewegungsgleichung für die Geschwindigkeit erhält man wegen der Inkompressibilitätsbedingung durch Divergenzbildung eine Potentialgleichung für p :

$$\Delta p = g(\mathbf{r}, z), \quad |z| \leq \frac{d}{2} \quad . \quad (6.93)$$

Dabei hängt die spezielle Form der Inhomogenität $g(\mathbf{r}, z)$ vom jeweils betrachteten konkreten System ab. Die Randbedingungen für den Druck lauten bei Rayleigh–Bénard–Konvektion

$$\partial_z p|_{z=\pm \frac{d}{2}} = 0 \quad ; \quad (6.94)$$

im Fall der Ekman–Schicht hat man nur für den einen Rand eine Neumannsche Randbedingung. Der entscheidende Unterschied zum magnetostatischen Potential besteht darin, dass es keinen Einfluss des Außenraums auf die Randbedingungen gibt.

Für $\mathbf{k} \neq 0$ kann diese Potentialgleichung (6.93) allgemein wie in Kapitel 4 behandelt werden, doch genau wie im magnetischen Fall tritt wegen der Neumannschen Randbedingungen (6.94) eine additive Integrationskonstante auf. Für diese ergibt sich analog zur Integration des magnetostatischen Potentials in Abschnitt 6.2 aus der Randbedingung in dritter Ordnung für anisotrope Systeme eine Bedingungsgleichung der Form¹²

$$\Delta_1 C_i^{(1)} + \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} g_0^{(3)}(\mathbf{r}_n, z') dz' = 0. \quad (6.95)$$

Dies kann man qualitativ direkt an der Bedingungsgleichung für das magnetostatische Potential in dritter Ordnung (6.28) erkennen: Im magnetischen Fall wurde durch diese Gleichung $C_i^{(2)}$ festgelegt, aber im hydrodynamischen System fällt der Anteil von $C_{a\pm}^{(2)}$ weg, da der Druck im Außenraum keinen Beitrag liefert. Damit erhält man Gleichung (6.95), wobei der Beitrag der Magnetisierung durch eine allgemeinere Inhomogenität $g_0^{(3)}$ ersetzt werden muss. Es lässt sich zeigen, dass unabhängig von der speziellen Form der Inhomogenität nur ein möglicher Term auftreten kann, der proportional zu $\nabla_1 |A_1|^2$ ist¹³. Damit ergibt sich also statt der Integralgleichung für $C_i^{(2)}$ (6.62) eine Mean–Drift–Gleichung der Form

$$\Delta_1 C_i^{(1)} + \tilde{\mathbf{d}} \cdot \nabla_1 |A_1|^2 = 0. \quad (6.96)$$

Die Ableitung der Amplitudengleichung aus dem vorigen Abschnitt gilt hier im Prinzip auch, weil dort kein Gebrauch von der expliziten Form von C_i gemacht

¹²Der Index i ist hier eigentlich nicht erforderlich, da keine Integrationskonstanten für den Außenraum auftreten; er wird aber für den Vergleich mit den Gleichungen des magnetostatischen Potentials beibehalten.

¹³Terme proportional zu $A_1 A_2^* + c.c.$ müssen verschwinden, da die Inhomogenität sonst schon in zweiter Ordnung die Randbedingungen nicht erfüllen würde.

wurde, allerdings treten alle Terme schon eine Ordnung vorher auf, da $C_i^{(1)}$ nicht verschwindet. Der nichtlokale Anteil von $b_i^{(3)}$ tritt wegen der fehlenden Wirkung des Außenraums nicht auf (vgl. (6.30)).

Für Systeme mit unsymmetrischen Eigenmoden in z -Richtung treten also Mean-Drift-Effekte in dritter Ordnung auf [HaLe], während für symmetrische Eigenmoden, also zum Beispiel bei Rayleigh-Bénard-Konvektion, der Koeffizient $\tilde{\mathbf{d}}$ verschwinden kann, so wie \mathbf{d} im magnetischen Fall. Dann machen sich die Effekte erst in der vierten Ordnung auf analoge Weise bemerkbar. Der nichtlokale Beitrag unterscheidet sich aber von dem für ferromagnetische Filme, wie (6.96) verdeutlicht, da der Einfluss langsamer Skalen z_n nicht vorhanden ist.

Für isotrope Systeme ergeben sich kompliziertere Gleichungen, da die Richtungen senkrecht und parallel zum kritischen Eigenvektor mit verschiedenen Potenzen von ε skaliert werden müssen. Dagegen ist aber der Laplace-Operator in der Potentialgleichung für den Druck (6.93) bzw. in der Gleichung für $C_i^{(1)}$ (6.95) isotrop. Um den Variationen in beiden Richtungen Rechnung zu tragen, werden daher meist Terme verschiedener Größenordnung vermischt [Cr83].

In isotropen Systemen sind Mean-Drift-Effekte für das Auftreten einer neuen sekundären Instabilität verantwortlich: Die Skew-Varicose-Instabilität macht sich wie die Eckhaus- und die Zig-Zag-Instabilität zuerst für langwellige Störungen bemerkbar, tritt aber im Gegensatz zu diesen weder parallel noch normal zum ursprünglichen Muster auf. Sie spielt für kleine Prandtl-Zahlen eine wesentliche Rolle beim Übergang zur Turbulenz.

Mean-Drift-Effekte werden auch in Phasengleichungen untersucht [CrNe, NPS]. Dort kann eine weitere neue Instabilität detektiert werden, die Fokus-Instabilität, die zwar nicht die Stabilität von ebenen Rollen betrifft, aber einen großen Einfluss beim Einsetzen von Zeitabhängigkeit im System haben kann. Außerdem sind Mean-Drift-Terme bei Defektbildungen beteiligt.

6.5 Ausblick

Wir haben durch die langreichweitige Wechselwirkung in ferromagnetischen Systemen eine Amplitudengleichung mit nichtlokalem Beitrag (6.90) erhalten. Eine sich daran direkt anschließende Frage besteht natürlich darin, welches Lösungsverhalten diese Gleichung zeigt. Man sieht leicht, dass laufende Wellen

$$A_1(\mathbf{r}_1, t_2) = \hat{A}_1 e^{i(\mathbf{K}_1 \mathbf{r}_1 + \Omega_2 t_2)} \quad (6.97)$$

ebenso wie bei der komplexen Ginzburg-Landau-Gleichung stationäre Lösungen von (6.90) sind, da der nichtlokale Term beim Einsetzen von (6.97) verschwindet. Auf die

Stabilität dieser Lösungen hat der Integralterm aber auf jeden Fall einen wichtigen Einfluss, wie man an den neuen sekundären Instabilitäten beim Auftreten von Mean-Drift-Termen in der Hydrodynamik sieht. Es erscheint also lohnend, zukünftig diese sekundären Instabilitäten der Lösungen (6.97) für den ferromagnetischen Film zu untersuchen. Außerdem stellt sich die Frage nach weiteren Lösungen der nichtlokalen Amplitudengleichung.

Durch den teilweise schon verwendeten allgemeinen Formalismus bietet sich die Möglichkeit, den allgemeinen Einfluss langreichweitiger Wechselwirkungen auf die Nichtgleichgewichtsstrukturbildung zu erforschen. Dazu wird es notwendig sein, den Einfluss der Randbedingungen und des Außenraums, der hier nur für konkrete Systeme analysiert werden konnte, allgemein zu erfassen.

Kapitel 7

Zusammenfassung

In dieser Arbeit haben wir uns mit der Frage beschäftigt, welchen Einfluss die langreichweitige Dipolarwechselwirkung auf die Nichtgleichgewichtsstrukturbildung in ferromagnetischen Filmen hat. Der Ausgangspunkt der Arbeit war die dissipative Landau–Lifshitz–Gleichung, die die raum–zeitliche Magnetisierungsdynamik eines getriebenen ferromagnetischen Films beschreibt. Neben dem statischen und dem treibenden Feld und einer biaxialen Anisotropie wurden die kurzreichweitige Austauschwechselwirkung und insbesondere das nichtlokale Dipolarfeld berücksichtigt. Dieses lässt sich in magnetostatischer Näherung als der Gradient eines Potentials beschreiben, für das man eine zusätzliche Differentialgleichung erhält. Mit den zugehörigen Randbedingungen, die sich aus den Maxwellschen Stetigkeitsbedingungen ergeben, lassen sich die Fouriermoden des Potentials für $\mathbf{k} \neq 0$ mittels Greenscher Funktionen integrieren.

Durch das statische Feld wird eine Richtung der homogenen Magnetisierung ausgezeichnet. Diese stationäre Lösung kann, wie von Suhl für homogen getriebene ferromagnetische Systeme zum ersten Mal gezeigt wurde [Suhl57], durch treibende Felder destabilisiert werden. Da das System explizit zeitabhängig ist, kann das lineare Floquet–Problem zur Bestimmung der Instabilitätsschwelle in der Regel nur numerisch gelöst werden. Im Spezialfall kleiner treibender Felder und kleiner Dämpfung ist aber auch ein störungstheoretischer Zugang möglich. In erster Ordnung Störungstheorie tritt eine Instabilität auf, wenn die Eigenwerte des ungestörten Systems gerade der halben treibenden Frequenz entsprechen. Zur Berechnung der Instabilitätsschwelle werden dabei die räumlichen Eigenmoden des ungetriebenen Systems benötigt. Im Fall einer anisotropen XY –Austauschwechselwirkung konnten diese leicht bestimmt werden, während die exakten Eigenmoden bei isotroper Austauschwechselwirkung wegen der zusätzlich benötigten Randbedingungen für die Magnetisierung recht kompliziert sind. Daher haben wir hier genäherte Moden für den Fall gemischter Randbedingungen verwendet.

Mit diesen Eigenmoden ergeben sich die Schwellwerte des treibenden Feldes, bei

denen die stationäre Lösung instabil wird. Die niedrigste Instabilität tritt bei einem kritischen Wellenvektor auf, dessen Richtung durch das Zusammenwirken von Anisotropie und Orts- und Spinraum koppelter Dipolarwechselwirkung festgelegt wird.

In Kenntnis dieser Instabilität haben wir uns der schwach nichtlinearen Analyse der raum-zeitlichen Dynamik des Systems zugewandt. Dazu haben wir zunächst allgemeine Amplitudengleichungen für Systeme mit nichtlokaler Kopplung abgeleitet. Unter Beachtung der Ableitungsrelationen für die zusätzliche Gleichung ergab sich die bekannte komplexe Ginzburg-Landau-Gleichung. Die Wirkung der nichtlokalen Kopplung machte sich dabei in den Eigenschaften des linearen Spektrums und in den Beiträgen des nichtlinearen Koeffizienten bemerkbar. Zur Ableitung der Gleichung musste aber die Voraussetzung erfüllt sein, dass alle Beiträge der zusätzlichen Gleichung insbesondere für $\mathbf{k} \rightarrow 0$ regulär sind. Damit enthält die Amplitudengleichung keine nichtlokalen Terme.

Unter Berücksichtigung der Ergebnisse aus der linearen Stabilitätsanalyse konnten zunächst die Koeffizienten für eine Amplitudengleichung berechnet werden, die Strukturen ohne nichtlokale Beiträge beschreibt. Durch die lineare Floquetsche Störungstheorie ergibt sich in der niedrigsten Ordnung ein imaginärer kubischer Koeffizient, während sich für den Diffusionsterm sowohl der Real- als auch der Imaginärteil bestimmen lassen. Über das Vorzeichen des Realteils des nichtlinearen Koeffizienten lässt sich erst mit der Bestimmung der kritischen Eigenvektoren in erster Ordnung eine Aussage machen.

Bei der Berechnung der konkreten Beiträge des magnetostatischen Potentials fiel aber auf, dass singuläre Terme auftreten. Dies macht sich in der Säkularbedingung, aus der sich die allgemeine Amplitudengleichung ergab, nicht bemerkbar, führt aber in der nächsten Ordnung zu nichtlokalen Effekten. Durch die Fouriermoden der Magnetisierung mit $\mathbf{k} = 0$ aus der zweiten Ordnung ergeben sich langreichweitige Beiträge des Potentials, die insbesondere im Außenraum zu langsamen Variationen in allen Raumrichtungen führen. Formal können diese nichtlokalen Beiträge entweder über die Randbedingungen der Potentialgleichung abgeleitet oder direkt aus einem Grenzübergang der spektralen Integraloperatoren gewonnen werden. Auf Grund der Potentialeigenschaft treten in der dritten Ordnung in der dynamischen Gleichung keine resonanten nichtlokalen Beiträge auf; erst in vierter Ordnung ergibt sich eine Amplitudengleichung mit einem zusätzlichen Integralterm, dessen Koeffizienten sowohl für die XY-Moden als auch für die genäherten Moden bei isotropem Austausch berechnet wurden.

Damit haben wir eine Gleichung abgeleitet, die nichtlokale Effekte der Dipolarwechselwirkung berücksichtigt. Um eine Kenntnis über die Lösungseigenschaften dieser neuen Gleichung zu gewinnen, bietet es sich nun an, sekundäre Instabilitäten laufender Wellen zu untersuchen, die eine stationäre Lösung der gewonnenen Amplitudengleichung sind. Der Vergleich mit Mean drift-Effekten in der Hydrodynamik legt

es nahe, dass diese durch den Integralterm entscheidend beeinflusst werden.

Die hier bereits dargestellte teilweise Formalisierung der Störungsentwicklung bietet einen Ausgangspunkt, um den Einfluss räumlich nichtlokaler Wechselwirkungen auf die Strukturbildung im Rahmen der schwach nichtlinearen Analyse systematisch und modellunabhängig zu untersuchen. Damit wäre es möglich, Gemeinsamkeiten und Unterschiede langreichweitiger Kopplungen (wie sie zum Beispiel in der Hydrodynamik über den Druck, in magnetischen Systemen durch die Dipolarwechselwirkung oder in gravitativen Systemen bei der Sternentstehung oder Galaxienbildung durch die Gravitationswechselwirkung vermittelt werden) herauszuarbeiten und ihren Einfluss auf die Nichtgleichgewichtsstrukturbildung in universeller Weise zu erfassen.

Anhang A

Floquetsche Störungstheorie

Wir untersuchen eine lineare Differentialgleichung der Form¹

$$\dot{\phi} = \underline{\underline{L}}_0 \phi + \eta \underline{\underline{L}}_1(t) \phi \quad , \quad \eta \ll 1, \quad \phi \in \mathbb{R}^2 \quad , \quad (\text{A.1})$$

wobei $\underline{\underline{L}}_0$ konstante Koeffizienten hat und $\underline{\underline{L}}_1$ die Dämpfung und das treibende Feld enthält. Dieses soll periodisch von der Zeit abhängen, d. h. für den Operator $\underline{\underline{L}}_1$ gilt

$$\underline{\underline{L}}_1(t + T) = \underline{\underline{L}}_1(t) \quad \text{mit} \quad T = \frac{2\pi}{\Omega} \quad . \quad (\text{A.2})$$

Er lässt sich also immer nach periodischen Funktionen entwickeln:

$$\underline{\underline{L}}_1(t) = \sum_n \underline{\underline{L}}_{1n} e^{in\Omega t} \quad , \quad (\text{A.3})$$

wobei die Koeffizienten von $\underline{\underline{L}}_{1n}$ zeitlich konstant sind. Für reelle Systeme muss dabei

$$\underline{\underline{L}}_{1n} = \underline{\underline{L}}_{1\bar{n}}^* \quad \text{mit} \quad \bar{n} := -n \quad (\text{A.4})$$

erfüllt sein.

Ungestörtes System ($\eta = 0$):

Damit störungstheoretisch überhaupt eine Instabilität auftreten kann, muss $\underline{\underline{L}}_0$ rein imaginäre Eigenwerte besitzen. Mit den zugehörigen Rechts- bzw. Linkseigenvektoren gelten also die Eigenwertgleichungen

$$\underline{\underline{L}}_0 u_{\pm} = \pm i\omega_0 u_{\pm} \quad \text{bzw.} \quad v_{\pm}^* \underline{\underline{L}}_0 = \pm i\omega_0 v_{\pm}^* \quad . \quad (\text{A.5})$$

¹Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf ein zweidimensionales System, das ja hier auch vorliegt. Die Verallgemeinerung auf höherdimensionale Systeme bereitet aber keine prinzipiellen Schwierigkeiten.

Dabei gilt für die Eigenvektoren bei reellem $\underline{\underline{L}}_0$

$$v_-^* = v_+ \quad \text{bzw.} \quad u_-^* = u_+ \quad . \quad (\text{A.6})$$

Bei einem negativen Realteil der Ordnung 1 könnte eine kleine Störung der Ordnung η nämlich keine Instabilität hervorrufen; daher muss die Dämpfung, wie oben gefordert, in $\underline{\underline{L}}_1$ enthalten sein.

Getriebenes System:

Ein explizit zeitabhängiges lineares Differentialgleichungssystem mit periodischen Koeffizienten lässt sich nach dem Floquet–Theorem durch den Ansatz

$$\phi(t) = p(t)e^{\lambda t} \quad (\text{A.7})$$

lösen [GuHo], wobei $p(t)$ periodisch in der Zeit ist:

$$p(t + T) = p(t) \quad . \quad (\text{A.8})$$

Dabei bestimmt der Floquet–Exponent λ die Stabilität des Systems; wegen der Abspaltung des periodischen Anteils p kann man den Imaginärteil dabei auf eine Brillouin–Zone beschränken:

$$\text{Im } \lambda \in \left[-\frac{\Omega}{2}, \frac{\Omega}{2} \right] \quad (\text{A.9})$$

Durch Einsetzen des Floquet–Ansatzes (A.7) in die Differentialgleichung (A.1) erhält man

$$\lambda p + \dot{p} = \left(\underline{\underline{L}}_0 + \eta \underline{\underline{L}}_1(t) \right) p \quad . \quad (\text{A.10})$$

Entwickelt man p und λ nach dem Kleinheitsparameter η :

$$p = p_0 + \eta p_1 + \dots, \quad \lambda = \lambda_0 + \eta \lambda_1 + \dots, \quad (\text{A.11})$$

lässt sich (A.10) durch eine Störungsentwicklung lösen. Dabei wird für das Auftreten einer Instabilität entscheidend sein, ob die Frequenz des treibenden Feldes resonant, d. h. ob $\Omega = \frac{2\omega_0}{n}$ ist.

Außerhalb der Resonanz

Nullte Ordnung:

Mit der Entwicklung der Lösung (A.11) lautet die nullte Ordnung von (A.10)

$$\lambda_0 p_0 + \dot{p}_0 = \underline{\underline{L}}_0 p_0 \quad . \quad (\text{A.12})$$

Diese lässt sich durch Multiplikation mit dem Linkseigenvektor v_+^* von $\underline{\underline{L}}_0$ lösen: Mit

$$\frac{d}{dt} \langle v_+ | p_0 \rangle = (i\omega_0 - \lambda_0) \langle v_+ | p_0 \rangle \quad (\text{A.13})$$

ergibt sich für den projizierten Anteil die Lösung

$$\langle v_+ | p_0 \rangle(t) = e^{(i\omega_0 - \lambda_0)t} \langle v_+ | p_0 \rangle(0) \quad . \quad (\text{A.14})$$

Wegen der zeitlichen Periodizität von p (A.8) muss $e^{(i\omega_0 - \lambda_0)T} = 1$ sein; damit erhält man für den Floquet-Exponenten

$$\lambda_0 = i\omega_0 + in\Omega, \quad n \in \mathbb{Z} \quad . \quad (\text{A.15})$$

Wegen (A.9) kann man sich aber auf eine Lösung beschränken:

$$\lambda_0 = i\omega_0, \quad p_0 = u_+ \quad . \quad (\text{A.16})$$

Analog ergibt sich durch Multiplikation mit dem Linksfloqueteigenvektor v_-^* die zweite, linear unabhängige Lösung

$$\lambda_0 = -i\omega_0, \quad p_0 = u_- \quad . \quad (\text{A.17})$$

Erste Ordnung:

In erster Ordnung lautet die Differentialgleichung für p_1

$$\lambda_0 p_1 + \lambda_1 p_0 + \dot{p}_1 = \underline{\underline{L}}_0 p_1 + \underline{\underline{L}}_1(t) p_0 \quad . \quad (\text{A.18})$$

Durch Multiplikation mit den Linkseigenvektoren v_\pm^* von $\underline{\underline{L}}_0$ folgt unter Berücksichtigung der Lösung aus der nullten Ordnung

$$\frac{d}{dt} \langle v_\pm | p_1 \rangle = (\pm i\omega_0 - \lambda_0) \langle v_\pm | p_1 \rangle - \lambda_1 \langle v_\pm | p_0 \rangle + \langle v_\pm | \underline{\underline{L}}_1(t) p_0 \rangle \quad . \quad (\text{A.19})$$

Die Integration liefert

$$\begin{aligned} \langle v_{\pm}|p_1\rangle(t) &= e^{(\pm i\omega_0 - \lambda_0)t} \langle v_{\pm}|p_1\rangle(0) \\ &+ \int_0^t e^{(\pm i\omega_0 - \lambda_0)(t-t')} \left(\langle v_{\pm}|\underline{L}_{\underline{1}}(t')p_0\rangle - \lambda_1 \langle v_{\pm}|p_0\rangle \right) dt' \quad . \quad (\text{A.20}) \end{aligned}$$

Wegen der T -Periodizität von p (A.8) muss für das obere Vorzeichen die Bedingung

$$\int_0^T \left(\langle v_+|\underline{L}_{\underline{1}}(t')p_0\rangle - \lambda_1 \langle v_+|p_0\rangle \right) dt' = 0 \quad (\text{A.21})$$

erfüllt sein. Setzt man p_0 ein und berücksichtigt die Zerlegung von $\underline{L}_{\underline{1}}$ (A.3), ergibt sich nach der Integration über eine Periode

$$\lambda_1 = \frac{\langle v_+|\underline{L}_{\underline{10}}u_+\rangle}{\langle v_+|u_+\rangle} \quad . \quad (\text{A.22})$$

Für das untere Vorzeichen von (A.21) erhält man wegen (A.6) und (A.4) denselben Eigenwert λ_1 . Da $\underline{L}_{\underline{10}}$ den Dämpfungsanteil der Störung darstellt, gilt $\lambda_1 < 0$; es tritt also außerhalb der Resonanz in der ersten Ordnung keine Instabilität auf.

In der Resonanz: $\omega_0 = \frac{n\Omega}{2}$

Nullte Ordnung:

Analog zum Fall außerhalb der Resonanz erhält man in niedrigster Ordnung aus (A.13) für den Floquet-Exponenten $\lambda_0 = i\frac{n\Omega}{2}$, aber wegen der Periodizität (A.8) hat der zugehörige Eigenvektor p_0 einen zusätzlichen Beitrag²:

$$\lambda_0 = i\frac{n\Omega}{2}, \quad p_0 = \alpha u_+ + \beta e^{-in\Omega t} u_- \quad . \quad (\text{A.23})$$

Für den zweiten Exponenten $\lambda_0 = -i\frac{n\Omega}{2}$ ergibt sich dieselbe Lösung ϕ_0 , die beiden Zustände sind also entartet. Die Koeffizienten α, β sind in dieser Ordnung unbestimmt, erst das treibende Feld in erster Ordnung legt die der Störung angepassten Eigenvektoren fest.

²Wegen (A.9) könnte man den Floquet-Exponenten auf den Bereich einer Periode (d. h. $n = 1$) beschränken und p_0 entsprechend modifizieren; für die weitere Rechnung ist es aber bequemer, die Lösung in nullter Ordnung in dieser Form zu verwenden.

Erste Ordnung:

Mit p_0 in der Resonanz (A.23) ergeben sich durch die Integration (A.20) nun zwei verschiedene Bedingungsgleichungen für die Periodizität von p_1 :

$$\int_0^T \left(\langle v_+ | \underline{\underline{L}}_1(t') p_0 \rangle - \lambda_1 \langle v_+ | p_0 \rangle \right) dt' = 0 \quad (\text{A.24})$$

$$\int_0^T e^{i\Omega t'} \left(\langle v_- | \underline{\underline{L}}_1(t') p_0 \rangle - \lambda_1 \langle v_- | p_0 \rangle \right) dt' = 0 \quad . \quad (\text{A.25})$$

Setzt man p_0 (A.23) und (A.3) ein, ergibt sich nach der Integration über ein Periode

$$\begin{aligned} \alpha \langle v_+ | \underline{\underline{L}}_{10} u_+ \rangle + \beta \langle v_+ | \underline{\underline{L}}_{1n} u_- \rangle + \alpha \lambda_1 \langle v_+ | u_+ \rangle &= 0 \\ \alpha \langle v_- | \underline{\underline{L}}_{1\bar{n}} u_+ \rangle + \beta \langle v_- | \underline{\underline{L}}_{10} u_- \rangle - \beta \lambda_1 \langle v_- | u_- \rangle &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Man erhält also für λ_1 eine Eigenwertgleichung

$$\underline{\underline{B}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (\text{A.27})$$

mit den Lösungen

$$\lambda_{1\pm} = \frac{1}{2} \left(\text{Sp} \underline{\underline{B}} \pm \sqrt{(\text{Sp} \underline{\underline{B}})^2 - 4 \text{Det} \underline{\underline{B}}} \right) \quad . \quad (\text{A.28})$$

Berücksichtigt man noch (A.6) und (A.4), folgt aus (A.26)

$$\text{Sp} \underline{\underline{B}} = 2 \text{Re} \frac{\langle v_+ | \underline{\underline{L}}_{10} u_+ \rangle}{\langle v_+ | u_+ \rangle} \quad (\text{A.29})$$

$$\text{Det} \underline{\underline{B}} = \frac{\left| \langle v_+ | \underline{\underline{L}}_{10} u_+ \rangle \right|^2 - \left| \langle v_+ | \underline{\underline{L}}_{1n} u_- \rangle \right|^2}{\left| \langle v_+ | u_+ \rangle \right|^2} \quad . \quad (\text{A.30})$$

Ein Eigenwert $\lambda_{1+} = 0$ tritt für $\text{Det} \underline{\underline{B}} = 0$ auf,³ das System wird also dann instabil, wenn die Bedingung

$$\left| \langle v_+ | \underline{\underline{L}}_{10} u_+ \rangle \right|^2 = \left| \langle v_+ | \underline{\underline{L}}_{1n} u_- \rangle \right|^2 \quad (\text{A.31})$$

erfüllt ist. Mit $\lambda_1 = 0$ erhält man aus (A.26) die Beziehung

$$\langle v_+ | \underline{\underline{L}}_{10} u_+ \rangle \alpha + \langle v_+ | \underline{\underline{L}}_{1n} u_- \rangle \beta = 0 \quad (\text{A.32})$$

³Komplex konjugierte Eigenwerte mit verschwindendem Realteil gibt es nicht, da das treibende Feld in $\text{Sp} \underline{\underline{B}}$ nicht auftritt.

und damit die der Störung angepassten Eigenvektoren in niedrigster Ordnung.

Die Instabilität bei $\omega_0 = \frac{n\Omega}{2}$ tritt also nur dann auf, wenn die Störung $\underline{\underline{L}}_1(t)$ die entsprechende Mode $\underline{\underline{\tilde{L}}}_{1n} e^{in\Omega t}$ enthält. Wird das System beispielsweise durch ein treibendes Feld mit der Zeitabhängigkeit $\cos\Omega t$ getrieben, tritt also nur eine Instabilität für $\omega_0 = \frac{\Omega}{2}$ auf. Um höhere Instabilitäten mit $n > 1$ zu erhalten, muss die Dämpfung mit einer höheren Potenz von η skaliert werden; das entspricht also stärkeren treibenden Feldern.

Anhang B

Entwicklung der linearen Operatoren

Zur Ableitung der allgemeinen Amplitudengleichung werden die Beiträge der linearen Operatoren (4.2) bzw. (4.10) und (4.11) benötigt, die durch die höheren Ordnungen der Differentialoperatoren auftreten. Mit

$$(\partial_x^\alpha \partial_y^\beta)^{[1]} = \alpha \partial_x^{\alpha-1} \partial_{x_1} \partial_y^\beta + \beta \partial_x^\alpha \partial_y^{\beta-1} \partial_{y_1} \quad (\text{B.1})$$

erhält man unter Berücksichtigung der Spektraldarstellungen (4.16), (4.17) für die erste Ordnung

$$\begin{aligned} (\mathcal{L} \underline{u}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} A)^{[1]} &= \sum_{\alpha\beta\gamma} \left(\alpha (ik_x)^{\alpha-1} (ik_y)^\beta \partial_z^\gamma \underline{\underline{L}}^{(\alpha\beta\gamma)} \underline{u}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \partial_{x_1} A \right. \\ &\quad \left. + \beta (ik_x)^\alpha (ik_y)^{\beta-1} \partial_z^\gamma \underline{\underline{L}}^{(\alpha\beta\gamma)} \underline{u}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \partial_{y_1} A \right) \\ &= (-i)(\nabla_{\mathbf{k}} \cdot \nabla_1) \mathcal{L}_{\mathbf{k}} \underline{u}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} A \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Analog ergibt sich mit

$$\begin{aligned} (\partial_x^\alpha \partial_y^\beta)^{[2]} &= \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \partial_x^{\alpha-2} \partial_{x_1}^2 \partial_y^\beta + \frac{\beta(\beta-1)}{2} \partial_x^\alpha \partial_y^{\beta-2} \partial_{y_1}^2 + \alpha\beta \partial_x^{\alpha-1} \partial_{x_1} \partial_y^{\beta-1} \partial_{y_1} \\ &\quad + \alpha \partial_x^{\alpha-1} \partial_{x_2} \partial_y^\beta + \beta \partial_x^\alpha \partial_y^{\beta-1} \partial_{y_2} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

für die zweite Ordnung

$$(\mathcal{L} \underline{u}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} A)^{[2]} = \frac{(-i)^2}{2} (\nabla_{\mathbf{k}} \cdot \nabla_1)^2 \mathcal{L}_{\mathbf{k}} \underline{u}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} A + (-i)(\nabla_{\mathbf{k}} \cdot \nabla_2) \mathcal{L}_{\mathbf{k}} \underline{u}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} A \quad . \quad (\text{B.4})$$

Anhang C

Ableitungsrelationen der zusätzlichen Gleichung

Für die Integration der zusätzlichen Gleichung benötigt man die Ableitungsrelationen der Spektraldarstellung. Die Inhomogenitäten der Gleichungen, die sich daraus ergeben, lassen sich mit den Beiträgen der linearen Operatoren in den höheren Ordnungen identifizieren. Dazu genügt es, die lineare Gleichung

$$\ell_{a\mathbf{k}}\rho_{\mathbf{k}} = \ell_{b\mathbf{k}}r \quad (\text{C.1})$$

zu betrachten, die mit dem zugehörigen Integraloperator die Lösung

$$\rho_{\mathbf{k}} = \mathcal{J}_{\mathbf{k}}r \quad (\text{C.2})$$

hat.

Erste Ableitungen

Die Differentiation von Gleichung (C.1) nach k_i (wobei $i = x, y$) liefert nach Einsetzen von (C.2)

$$\ell_{a\mathbf{k}}\partial_{k_i}\rho_{\mathbf{k}} = \partial_{k_i}\ell_{b\mathbf{k}}r - \partial_{k_i}\ell_{a\mathbf{k}}\rho_{\mathbf{k}} = \partial_{k_i}\ell_{b\mathbf{k}}r - \partial_{k_i}\ell_{a\mathbf{k}}\mathcal{J}_{\mathbf{k}}r \quad . \quad (\text{C.3})$$

Differenziert man andererseits die Lösung (C.2) nach k_i :

$$\partial_{k_i}\rho_{\mathbf{k}} = \partial_{k_i}\mathcal{J}_{\mathbf{k}}r \quad , \quad (\text{C.4})$$

muss dies gerade die Lösung der differenzierten Gleichung sein. Mit $\sigma_{\mathbf{k}} := \partial_{k_i}\rho_{\mathbf{k}}$ ergibt sich also die Äquivalenz

$$\ell_{a\mathbf{k}}\sigma_{\mathbf{k}} = \partial_{k_i}\ell_{b\mathbf{k}}r - \partial_{k_i}\ell_{a\mathbf{k}}\mathcal{J}_{\mathbf{k}}r \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{\mathbf{k}} = \partial_{k_i}\mathcal{J}_{\mathbf{k}}r \quad . \quad (\text{C.5})$$

Zweite Ableitungen

Durch nochmaliges Ableiten und Einsetzen von $\sigma_{\mathbf{k}}$ folgt

$$\begin{aligned}\ell_{a\mathbf{k}}\partial_{k_j}\sigma_{\mathbf{k}} &= \partial_{k_i}\partial_{k_j}\ell_{b\mathbf{k}}r - \partial_{k_i}\partial_{k_j}\ell_{a\mathbf{k}}\sigma_{\mathbf{k}} - \partial_{k_i}\ell_{a\mathbf{k}}\partial_{k_j}\sigma_{\mathbf{k}} \\ &= \partial_{k_i}\partial_{k_j}\ell_{b\mathbf{k}}r - \partial_{k_i}\partial_{k_j}\ell_{a\mathbf{k}}\mathcal{J}_{\mathbf{k}}r - \partial_{k_i}\ell_{a\mathbf{k}}\partial_{k_j}\mathcal{J}_{\mathbf{k}}r,\end{aligned}\quad (\text{C.6})$$

während die Ableitung der Lösung

$$\partial_{k_j}\sigma_{\mathbf{k}} = \partial_{k_i}\partial_{k_j}\mathcal{J}_{\mathbf{k}}r \quad (\text{C.7})$$

liefert. Mit $\tau_{\mathbf{k}} := \partial_{k_j}\sigma_{\mathbf{k}}$ ergibt sich also hier die Äquivalenz

$$\ell_{a\mathbf{k}}\tau_{\mathbf{k}} = \partial_{k_i}\partial_{k_j}\ell_{b\mathbf{k}}r - \partial_{k_i}\partial_{k_j}\ell_{a\mathbf{k}}\mathcal{J}_{\mathbf{k}}r - \partial_{k_i}\ell_{a\mathbf{k}}\partial_{k_j}\mathcal{J}_{\mathbf{k}}r \quad \Leftrightarrow \quad \tau_{\mathbf{k}} = \partial_{k_i}\partial_{k_j}\mathcal{J}_{\mathbf{k}}r \quad . \quad (\text{C.8})$$

Beiträge der entwickelten zusätzlichen Gleichung

Identifiziert man die Beiträge (4.49) und (4.48), die bei der verallgemeinerten Potentialgleichung in der Ordnung ε^2 auftreten:

$$(-i)(\nabla_k \cdot \nabla_1)(\ell_{bc}\underline{u}_c - \ell_{ac}\mathcal{J}_c\underline{u}_c)A_1 \quad (\text{C.9})$$

gerade mit der Inhomogenität in (C.3), führen sie mit der Äquivalenz (C.5) zu der Lösung

$$(-i)(\nabla_k \cdot \nabla_1)A_1\mathcal{J}_c\underline{u}_c \quad . \quad (\text{C.10})$$

Analog liefern die Beiträge in der Ordnung ε^3 aus (4.79)-(4.81)

$$-\frac{1}{2}(\nabla_k \cdot \nabla_1)^2(\ell_{bc}\underline{u}_c - \ell_{ac}\mathcal{J}_c\underline{u}_c)A_1 - (\nabla_k \cdot \nabla_1)\ell_{ac}(\nabla_k \cdot \nabla_1)A_1\mathcal{J}_c\underline{u}_c \quad (\text{C.11})$$

mit (C.8) die Lösung

$$-\frac{1}{2}(\nabla_k \cdot \nabla_1)^2A_1\mathcal{J}_c\underline{u}_c \quad . \quad (\text{C.12})$$

Anhang D

Transformationseigenschaften

Für den Fall, dass $\underline{u}_{\mathbf{k}}^{(\nu_c)}$ von \mathbf{k} abhängt, kann man eine T -periodische Transformation $\underline{R}(\mathbf{k}, t)$ einführen, die in der Umgebung von \mathbf{k}_c mit

$$\underline{R}(\mathbf{k}, t) \underline{u}_{\mathbf{k}}^{(\nu_c)}(z, t) = \underline{u}_c(z, t), \quad \underline{R}(\mathbf{k}_c, t) = \underline{1} \quad (\text{D.1})$$

eine Unabhängigkeit der kritischen Eigenvektoren von \mathbf{k} erreicht. Diese Transformation soll auf die Bewegungsgleichung (4.1) angewendet werden. Im Ortsraum transformieren sich mit dem Operator

$$\mathcal{R} := \underline{R}(-i\nabla_{\perp}, t) \quad (\text{D.2})$$

die Felder gemäß

$$\underline{\hat{m}} = \mathcal{R} \underline{m} \quad (\text{D.3})$$

$$\begin{aligned} \underline{\hat{\Phi}} &= \mathcal{R} \underline{\Phi} = \mathcal{R} \mathcal{J}_L \mathcal{R}^{-1} \mathcal{R} \underline{m} + \mathcal{R} \mathcal{J}_N \mathcal{R}^{-1} \mathcal{R} \underline{n}_2 [\mathcal{R}^{-1} \underline{m}] + \dots \\ &=: \hat{\mathcal{J}}_L \underline{\hat{m}} + \hat{\mathcal{J}}_N \underline{\hat{n}}[\underline{\hat{m}}] \quad . \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Setzt man $\underline{\hat{\Phi}}$ ein, erhält man für die transformierte Bewegungsgleichung

$$\partial_t \underline{\hat{m}} = \hat{\mathcal{L}} \underline{\hat{m}} + \hat{\mathcal{N}}[\underline{\hat{m}}, \underline{\hat{\Phi}}] \quad (\text{D.5})$$

mit den Operatoren

$$\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{R} \tilde{\mathcal{L}} \mathcal{R}^{-1} + \dot{\mathcal{R}} \mathcal{R}^{-1} \quad (\text{D.6})$$

$$\hat{\mathcal{N}}_2[\underline{\hat{m}}, \underline{\hat{\Phi}}] = \mathcal{R} \underline{\mathcal{N}}[\mathcal{R}^{-1} \underline{m}, \mathcal{R}^{-1} \underline{\Phi}] \quad . \quad (\text{D.7})$$

Mit der Spektraldarstellung $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbf{k}}$ ergibt sich für den transformierten Zeitentwicklungsoperator gerade

$$\hat{\mathcal{U}}_{\mathbf{k}}(t, t') = \underline{\underline{R}}(\mathbf{k}, t) \mathcal{U}_{\mathbf{k}}(t, t') \underline{\underline{R}}^{-1}(\mathbf{k}, t') \quad . \quad (\text{D.8})$$

Für die transformierte Gleichung (D.5) gilt die Ableitung der Amplitudengleichung aus Kapitel 4, da der transformierte Eigenvektor $\hat{\underline{u}}_{\mathbf{k}}^{(\nu_c)}$ von $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbf{k}}$ nicht von \mathbf{k} abhängt. Damit hängen aber die Koeffizienten von den transformierten Größen ab. Man muss also zeigen, dass die Transformation aus den Ausdrücken für die Koeffizienten herausfällt und die Ableitung der Amplitudengleichung auch für die ursprünglichen Bewegungsgleichungen gilt. Dies ist letztendlich deshalb möglich, weil alle auftretenden Koeffizienten Skalare sind.

Da die kritischen Eigenvektoren für \mathbf{k}_c unabhängig von der Transformation sind, tritt diese in den Koeffizienten \mathbf{v}_g (4.67) und $\underline{\underline{D}}$ (5.8) nicht auf. Die neue Amplitude \hat{A}_1 der transformierten Felder stimmt bis zur Ordnung ε mit A_1 überein. Setzt man die Definition des transformierten linearen Operators (D.6) in das Matrixelement für den linearen Koeffizienten μ (4.112) ein, fällt die Transformation bei der Integration über eine Periode heraus.

Um die Unabhängigkeit des nichtlinearen Koeffizienten r (4.114) zu zeigen, muss man alle Beiträge aus zweiter und dritter Ordnung überprüfen, die einen Beitrag leisten. Man kann sich durch sukzessives Einsetzen davon überzeugen, dass $\underline{\underline{B}}_c$ (4.101) und $\underline{\underline{D}}_c$ (4.102) im transformierten und ursprünglichen System identisch sind und somit auch $\hat{r} = r$ gilt.

Anhang E

Fouriertransformationen

Die in Kapitel 6.1 benötigten Fourierrücktransformationen werden beide auf ähnliche Weise durchgeführt; sie sind hier der Vollständigkeit halber angegeben. Die Integralgleichung in Kapitel 6.2.1 kann auch durch eine Fouriertransformation gelöst werden.

E.1 Fourierrücktransformationen

E.1.1 Beitrag von \mathcal{J}_\perp

Durch Fourierrücktransformation der Amplitude ergibt sich für das zweite Integral in (6.12)

$$\int d\mathbf{q} \frac{\mathbf{q}}{q} |\hat{A}_1|^2(\mathbf{q}, \mathbf{r}_2, \dots) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_1} = \int d\mathbf{r}'_1 |A_1(\mathbf{r}'_1, \dots)|^2 \int d\mathbf{q} \frac{\mathbf{q}}{q} e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1)} \quad . \quad (\text{E.1})$$

Das zweite Integral kann mit dem Übergang auf Polarkoordinaten und durch anschließende partielle Integration gelöst werden:

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{q} \frac{\mathbf{q}}{q} e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1)} &= \int dq d\phi \begin{pmatrix} q \cos \phi \\ q \sin \phi \end{pmatrix} e^{i(q \cos \phi (x_1 - x'_1) + q \sin \phi (y_1 - y'_1))} \\ &= -i \nabla_1 \int dq d\phi \begin{pmatrix} q \cos \phi \\ q \sin \phi \end{pmatrix} e^{iq|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1| \sin(\phi + \hat{\phi})} \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

$$\begin{aligned} &= -2\pi i \nabla_1 \int dq J_0(q|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1|) \\ &= -2\pi i \nabla_1 \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1|} \quad . \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

Damit erhält man für den nichtlokalen Beitrag in zweiter Ordnung

$$\Psi_{0i}^{(2)} = - \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \Gamma_0(z', t) dz' \cdot \nabla_1 \int d\mathbf{r}'_1 \frac{|A_1(\mathbf{r}'_1, \dots)|^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1|} + \dots \quad (\text{E.4})$$

E.1.2 Beitrag von \mathcal{J}_z

Für die Bestimmung des Beitrags von \mathcal{J}_z ist analog zu E.1.1 auch eine Fourierrücktransformation durchzuführen:

$$\int d\mathbf{q} |\mathbf{q}| |\hat{A}_1|^2(\mathbf{q}, \mathbf{r}_2, \dots) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} = \int d\mathbf{r}'_1 |A_1(\mathbf{r}')|^2 \int d\mathbf{q} |\mathbf{q}| e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1)} \quad . \quad (\text{E.5})$$

Für das zweite Integral ergibt sich, ebenfalls mit dem Übergang auf Polarkoordinaten und hier durch zweifache partielle Integration,

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{q} |\mathbf{q}| e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1)} &= \int dq d\phi q^2 e^{i(q \cos \phi (x_1 - x'_1) + q \sin \phi (y_1 - y'_1))} \\ &= -\Delta_1 \int dq d\phi e^{iq|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1| \sin(\phi + \hat{\phi})} \quad . \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

Man erhält hier dasselbe Integral wie in (E.2). Damit lautet der nichtlokale Beitrag des Potentials in dritter Ordnung

$$\Psi_{0i}^{(3)} = - \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} (z - z') |\underline{u}_c(z', t)|^2 dz' \Delta_1 \int d\mathbf{r}'_1 \frac{|A_1(\mathbf{r}'_1, \dots)|^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1|} + \dots \quad (\text{E.7})$$

E.2 Lösung der Integralgleichung

Für die Bestimmung von $C_i^{(2)}$ ergibt sich eine Integralgleichung der Form

$$\int C_i^{(2)}(\mathbf{r}'_1, \dots) K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1) d\mathbf{r}'_1 = -4\pi \mathbf{d} \cdot \nabla_1 |A_1(\mathbf{r}_1, \dots)|^2 \quad (\text{E.8})$$

mit dem Kern (6.64). Diese lässt sich mittels Fouriertransformation lösen. Für die linke Seite erhält man

$$\begin{aligned} &\int d\mathbf{r}_1 e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} \int C_i^{(2)}(\mathbf{r}'_1, \dots) K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1) d\mathbf{r}'_1 \\ &= \int d\mathbf{r}'_1 C_i^{(2)}(\mathbf{r}'_1, \dots) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}'_1} \int d\mathbf{r}_1 e^{-i\mathbf{q}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1)} K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1) \\ &= \hat{C}_i^{(2)}(\mathbf{q}, \mathbf{r}_2, \dots) \hat{K}(\mathbf{q}) \quad . \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

Dabei ergibt sich die Fouriertransformierte des Kerns mittels zweifacher partieller Integration, der Substitution $\mathbf{r}_1'' = \mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_1$ und der Einführung von Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned}
\hat{K}(\mathbf{q}) &= \int d\mathbf{r}_1 e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1')} K(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1') = \frac{1}{\pi} \int d\mathbf{r}_1 e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1')} \Delta \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1'|} \\
&= -\frac{q^2}{\pi} \int d\mathbf{r}_1'' e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_1''} \frac{1}{r_1''} = -\frac{q^2}{\pi} \int dr_1'' d\phi e^{-ikr_1'' \cos \phi} \\
&= -2q^2 \int_0^\infty J_0(qr'') = -2q \quad .
\end{aligned} \tag{E.10}$$

Für die rechte Seite erhält man

$$\begin{aligned}
-\int d\mathbf{r}_1' 4\pi \mathbf{d} \cdot \nabla |A_1(\mathbf{r}_1', \dots)|^2 e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_1'} &= 4\pi i \mathbf{d} \cdot \mathbf{q} \int d\mathbf{r}_1' |A_1(\mathbf{r}_1', \dots)|^2 e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_1'} \\
&= 4\pi i \mathbf{d} \cdot \mathbf{q} |\hat{A}_1|^2(\mathbf{q}, \mathbf{r}_2, \dots) \quad .
\end{aligned} \tag{E.11}$$

Damit ergibt sich aus (E.8) für die Fouriertransformierte von $C_i^{(2)}$

$$\hat{C}_i^{(2)}(\mathbf{q}, \mathbf{r}_2, \dots) = \frac{2\pi i \mathbf{d} \cdot \mathbf{q}}{q} |\hat{A}_1|^2(\mathbf{q}, \mathbf{r}_2, \dots) \quad . \tag{E.12}$$

Eine Fourierrücktransformation von $\hat{C}_i^{(2)}$ führt zu

$$C_i^{(2)}(\mathbf{r}_1, \dots) = \frac{i}{2\pi} \int d\mathbf{q} \mathbf{d} \cdot \frac{\mathbf{q}}{q} |\hat{A}_1|^2(\mathbf{q}, \mathbf{r}_2, \dots) \quad . \tag{E.13}$$

Das entspricht genau dem Beitrag $\Psi_{0i}^{(2)}$ (6.12) bei der Integralformulierung; es ergibt sich also als Lösung auch hier (E.4).

Literaturverzeichnis

- [Arno] V. I. Arnol'd, *Mathematische Methoden der klassischen Mechanik*, (Birkhäuser Verlag 1988) Kapitel 5.4
- [ArKr] I. S. Aronson, L. Kramer, *The world of Complex Ginzburg–Landau Equation*, Rev. Mod. Phys. **74** (in press 2002)
- [Akhi] A. I. Akhiezer, V. G. Bar'yaktar, S. V. Peletminskii, *Spin Waves*, (North–Holland Amsterdam 1968)
- [Bart] G. Barton, *Elements of Green's Functions and Propagation*, (Oxford University Press 1969)
- [BLN] H. R. Brand, P. S. Lomdahl, A. C. Newell, *Benjamin–Feir turbulence in convective binary fluid mixtures*, Physica **23 D** (1986) 345
- [Chan] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*, (Oxford University Press 1961)
- [CoSl] M. G. Cottam, A. N. Slavin, *Fundamentals of Linear and Nonlinear Spin–Wave Processes in Bulk and Finite Magnetic Samples*, in: M. G. Cottam, *Linear and nonlinear spin waves in magnetic films and superlattices*, (World Scientific 1994) 1
- [Cr83] M. C. Cross, *Phase dynamics of convective rolls*, Phys. Rev. **A 27** (1983) 490
- [CrNe] M. C. Cross, A. C. Newell, *Convection patterns in large aspect ratio systems*, Physica **D 10** (1984) 299
- [CrHo] M. C. Cross, P. C. Hohenberg, *Pattern formation out of equilibrium*, Rev. Mod. Phys. **65** (1993) 851
- [DMW] K. De'Bell, A. B. MacIsaac, J. P. Whitehead, *Dipolar effects in magnetic thin films and quasi–two–dimensional systems*, Rev. Mod. Phys. **72** (2000) 225

- [El88] F. J. Elmer, *Nonlinear and nonlocal dynamics of spatially extended systems: stationary states, bifurcations and stability*, Physica **D 30** (1988) 321
- [El93] F. J. Elmer, *Pattern formation due to spin-wave instabilities: squares, hexagons, and quasiperiodic patterns*, Phys. Rev. Lett. **70** (1993) 2028
- [El96] F. J. Elmer, *Pattern dynamics of parametrically excited spin waves near the instability threshold*, Phys. Rev. **B 53** (1996) 14323
- [Gara] D. A. Garanin, *Generalized equation of motion for a ferromagnet*, Physica **A 172** (1991) 172
- [GuHo] J. Guckenheimer, P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, (Springer 1983)
- [HaLe] T. M. Haeusser, S. Leibovich, *Amplitude and Mean Drift Equations for the Oceanic Ekman Layer*, Phys. Rev. Lett. **79** (1997) 329
- [Hake] H. Haken, *Synergetics*, (Springer 1978)
- [JustC] C. Just, Dissertation laufend
- [JustW] W. Just, F. Matthäus, H. R. Völger, C. Just, B. Rumpf, A. Riegert, *Weakly nonlinear analysis in spatially extended systems as a formal perturbation scheme*, preprint verfügbar über <http://de.arXiv.org/abs/patt-sol/9706006>
- [JMS] W. Just, F. Matthäus, H. Sauermann, *On the degenerated soft mode instability*, J. Phys. **A 31** (1998) 5925
- [Kali] B. A. Kalinikos, *Dipole-exchange spin-wave spectrum of magnetic films*, in: M. G. Cottam, *Linear and nonlinear spin waves in magnetic films and superlattices*, (World Scientific 1994) 89
- [Keff] F. Keffer, in: H. P. J. Wijn, *Handbuch der Physik*, Bd. XVIII/2 Ferromagnetismus (Springer Berlin 1966) 182
- [KnLu] E. Knobloch, J. de Luca, *Amplitude equations for travelling wave convection*, Nonlinearity **3** (1990) 975
- [Kugl] J. Kugler, Dissertation laufend
- [KuTs] Y. Kuramoto, T. Tsuzuki, *On the formation of dissipative structures in reaction-diffusion systems*, Prog. Theo. Phys. **54** (1975) 687
- [LaLi] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies*, Phys. Z. Sowjet. **8** (1935) 153 [Reprint in: D. ter Haag (Hrsg.), *Collected Papers of L. D. Landau*, (Pergamon Press Oxford 1965)]

- [MaSa] F. Matthäus, H. Sauermann, *Amplitude equations near pattern forming instabilities for strongly driven ferromagnets*, Z. Phys. **B 99** (1996) 611
- [NPS] A. C. Newell, T. Passot, M. Souli, *The phase diffusion and mean drift equations for convection at finite Rayleigh numbers in large containers*, J. Fluid Mech. **220** (1990) 187
- [NeWh] A. C. Newell, J. A. Whitehead, *Finite bandwidth, finite amplitude convection*, J. Fluid Mech. **38** (1969) 279
- [Plef] T. Plefka, *Nonlinear damping in spin systems: long range spin–spin interactions*, Z. Phys. **B 90** (1993) 447
- [SiZi] E. D. Siggia, A. Zippelius, *Pattern selection in Rayleigh–Bénard convection near threshold*, Phys. Rev. Lett. **47** (1981) 835
- [Suhl57] H. Suhl, J. Phys. Chem. Solids **1** (1957) 209
- [Suhl94] H. Suhl, *Some nonlinear effects in magnetically ordered materials*, in: P. E. Wigen, *Nonlinear phenomena and chaos in magnetic materials*, (World Scientific 1994) 33
- [Wolf] S. Wolfram, *Mathematica Version 3*, (Addison Wesley 1997)
- [WuHa] A. Wunderlin, H. Haken, *Scaling Theory for Nonequilibrium Systems*, Z. Phys. **B 21** (1975) 393
- [ZiSi] A. Zippelius, E. D. Siggia, *Stability of finite-amplitude convection*, Phys. Fluids **26** (1983) 2905

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. H. Sauermann meinen Dank aussprechen für die Anregungen zu dieser Arbeit und für sein stetiges Interesse an ihrem Fortgang.

Herrn Priv. Doz. Dr. Wolfram Just danke ich für die zahlreichen Diskussionen, die oft wichtige Impulse gaben, und für eine kritische Erörterung dieses Manuskripts.

Eine gründliche Durchsicht der Arbeit verdanke ich Frau Dipl.-Phys. C. Just und Herrn Dr.-Ing. K.-U. Kolshorn.

Lebenslauf

22.06.1971	geboren in Groß-Gerau
09/1977-12/1977	Wilhelm-Hauff-Schule in Darmstadt
12/1977-1981	Wichernschule in Düsseldorf
1981-11/1983	Dietrich-Bonhoeffer-Gymnasium Hilden
11/1983-1990	Karl-Rehbein-Schule, Gymnasium in Hanau
06/1990	Abitur
1990-1995	Physikstudium an der Technischen Hochschule Darmstadt
1992	Vordiplom
03/1994-09/1995	Diplomarbeit am Institut für Festkörperphysik bei Prof. Dr. H. Sauermann
09/1995	Diplom
10/1995-02/1996	Stipendiatin der Graduiertenförderung des Landes Hessen
seit 03/1996	wissenschaftliche Mitarbeiterin am Institut für Festkörperphysik der TH/TU Darmstadt

Erklärung

Ich versichere, dass ich diese Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe.

Bisher habe ich noch keinen Promotionsversuch unternommen.

Darmstadt, im Oktober 2001